Erweiterung der Analysis
Wintersemester 2020/2021

Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws20/ErweitAnalysis

2. Übungsblatt

Abgabetermin 20.11.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 2.1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Quader und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist f integrierbar.

(ii) Es seien $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Quader und eine Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $|f|$ integrierbar ist. Dann ist auch f integrierbar.

(iii) Es seien $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Quader und eine Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $|f|$ integrierbar ist mit $\int_Q |f(\underline{x})| \,\mathrm{d}\underline{x} = 0$. Dann ist auch f integrierbar und es gilt $\int_Q f(\underline{x}) \,\mathrm{d}\underline{x} = 0$.

(iv) Es seien $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Quader und zwei Funktion $f, g\colon Q \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f + g$ Riemann-integrierbar ist. Dann sind auch f und g Riemann-integrierbar.

Hinweis: Aus dieser Aussage würde folgen, dass *jede* Funktion Riemann-integrierbar ist.

Übung 2.2 Es sei $d \in \mathbb{R}^d$. Für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ definieren wir eine Funktion $\chi_A\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\chi_A(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{für } \underline{x} \in A \\ 0, & \text{für } \underline{x} \notin A. \end{cases}$$

Die Funktion χ_A heißt *charakteristische Funktion* von A. Wir betrachten nun einen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Zerlegung $\mathcal{P}(Q)$ in k Teilquader, d.h. $\mathcal{P}(Q) = \{A_i\}_{i=1,\ldots,k}$. Für beliebige $a_i \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, \ldots, k$ definieren wir

$$f := \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}.$$

Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und

$$\int_Q f(\underline{x}) \,\mathrm{d}\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda(A_i)$$

gilt.

Hinweis: Überlegen Sie sich wie die Funktion f für $d = 1$ und $d = 2$ aussehen kann und versuchen Sie die Beobachtung auf den allgemeinen Fall zu übertragen.

Übung 2.3 Wir betrachten einen Quader $Q \in \mathbb{R}^2$ mit $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Sei außerdem $f\colon [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $F\colon Q \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(\underline{x}) = f(x_1).$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Ober- und Untersummen, dass F Riemann-integrierbar ist und es gilt:

$$\int_Q F(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x} = (b_2 - a_2) \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Malen Sie sich ein Bild von F mit einer einfachen Funktion f.

Übung 2.4 (Tranformationssatz light) Sei $d \in \mathbb{N}$ und $Q \in \mathbb{R}^d$ ein Quader. Es sei außerdem G die Gruppe aus Aufgabe 1.2. Zeigen Sie für alle $g \in G$:

1. Es sei $\mathcal{P}(Q)$ eine Zerlegung von Q, so ist

   $$g(\mathcal{P}(Q)) := \{g(A) \mid A \in \mathcal{P}(Q)\}$$

   eine Zerlegung von $g(Q)$ mit Feinheit $\delta(g(\mathcal{P}(Q))) \leq \|g\| \cdot \delta(\mathcal{P}(Q))$ ist. Hier ist

   $$\|g\| := \max_{\underline{x} \in \mathbb{R}^d, \|\underline{x}\| = 1} \{\|g(\underline{x})\|\}.$$

2. Für eine Riemann-integrierbare Funktion $f\colon g(Q) \to \mathbb{R}$ gilt:

   $$\int_{g(Q)} f(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x} = \int_Q f(g(\underline{x}))|\det(g)|\,\mathrm{d}\underline{x}.$$

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass es für jedes Element $g \in G$ eine eindeutige Permutation $\sigma\colon \{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, d\}$ und Werte $\{\lambda_i\}_{i=\{1,\ldots,d\}}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, d\}$ gibt, so dass für alle Standardbasisvektoren e_k gilt:

$$g(e_k) = \lambda_k e_{\sigma(k)}.$$

Und Sie dürfen natürlich die Ergebnisse aus Aufgabe 1.2 verwenden.