Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws20/ErweitAnalysis

4. Übungsblatt

Abgabetermin 4.12.2020

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 4.1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar mit $A \subsetneq B$. Dann gilt $\lambda(A) < \lambda(B)$.

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ stetig und $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Jordan-Nullmenge. Dann ist auch $f(A)$ eine Jordan-Nullmenge.

(iii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ stetig und $A \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Jordan-Nullmenge. Dann ist auch $f^{-1}(A)$ eine Jordan-Nullmenge.

(iv) Es seinen $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt, dann gilt $\lambda_*(A \cup B) \leq \lambda_*(A) + \lambda_*(B)$

Übung 4.2 Es seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Wir betrachten die Menge

$$A_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

Zeigen Sie, dass $A_{f,g}$ Jordan-messbar ist und dass

$$\lambda(A_{f,g}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt.
Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3.3, dass $\partial A_{f,g}$ eine Jordan-Nullmenge ist und benutzen Sie, dass f und g integrierbar sind.

Übung 4.3 Es sei $d \in \mathbb{N}$ und G die Gruppe aus Aufgabe 1.2. Zeigen Sie, dass für jede Jordan-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ und für alle $g \in G$ die Menge

$$g(A) = \{g(\underline{x}) \in \mathbb{R}^d \mid \underline{x} \in A\}$$

Jordan-messbar ist und $\lambda(g(A)) = |\det g|\lambda(A)$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen alle Ergebnisse über die Gruppe G aus den vorherigen Übungsblättern verwenden.

Übung 4.4 Es seien $a, b > 0$. Wir bezeichnen mit $A_{E_{ab}} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Fläche, die von der Ellipse

$$E_{ab} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1\}$$

eingeschlossen wird, also

$$A_{E_{ab}} = \left\{(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b] \;\middle|\; -b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2} \leq y \leq b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}\right\}.$$

Zeigen Sie, dass $A_{E_{ab}}$ Jordan-messbar ist und $\lambda(A_{E_{ab}}) = ab\pi$.

Hinweis: Sie dürfen die Ergebnisse aus den Aufgaben 4.2 und 4.3 und $\lambda(E_{11}) = \pi$ benutzen.