Oliver Bräunling
Jonas Schnitzer

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws20/ErweitAnalysis

9. Übungsblatt

Abgabetermin 22.1.2021

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie können Übungsblätter in Gruppen von bis zu 2 Studierenden abgeben.
Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Übung 9.1 Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge, dann gilt $\partial(\partial A) = \emptyset$.

(ii) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Teilmenge, dann gilt $(\partial A)^\circ = \emptyset$.

(iii) Es sei $\underline{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, so dass für alle Jordan-messbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\int_A \operatorname{div} \underline{f} \, \mathrm{d}\underline{x} = 0$$

gilt, dann ist $\underline{f}$ konstant.

(iv) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$-Polyeder mit Einheits-Normalenfeld $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$, dann gilt

$$\int_{\partial A} n_i(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x} = 0$$

für $i \in \{1, 2, 3\}$.

Übung 9.2 Es seien $\underline{f}, \underline{g} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, sowie $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben. Zeigen Sie:

(i) $\underline{\nabla}(\psi \circ \phi) = (\psi' \circ \phi)\underline{\nabla}\phi$

(ii) $\operatorname{div}(\underline{f} \times \underline{g}) = \langle \underline{f}, \underline{\nabla} \times \underline{g} \rangle - \langle \underline{g}, \underline{\nabla} \times \underline{f} \rangle$

(iii) $\underline{\nabla} \times (\phi \underline{f}) = \phi \underline{\nabla} \times \underline{f} + \underline{f} \times \underline{\nabla}\phi$

(iv) $\operatorname{div}(\underline{\nabla} \times f) = 0$

Übung 9.3 In Bemerkung 2.42 wird der Satz von Gauß in Dimension 2 erwähnt, aber nicht bewiesen, dass er gilt. Beweisen Sie den Satz von Gauß in Dimension 2 mit Hilfe des Satzes von Gauß in Dimension 3.

Hinweis: Setzen Sie eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^2)$ geeignet zu einer Funktion in $\mathcal{C}^1(A \times [0,1], \mathbb{R}^3)$ fort und benutzen Sie hierfür den Satz von Gauß in Dimension 3. Sie dürfen außerdem annehmen, dass A einen glatten Rand hat.

Übung 9.4 Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig mit Zentrum 0, das heißt für alle $\underline{x} \in A$ ist $t\underline{x} \in A$ für alle $t \in [0,1]$. Für eine Vektorfeld $\underline{F} \in \mathcal{C}^\infty(A, \mathbb{R}^3)$ definieren wir ein Vektorfeld $\underline{G} \in \mathcal{C}^\infty(A, \mathbb{R}^3)$ durch

$$\underline{G}(\underline{x}) := \int_0^1 \underline{F}(t\underline{x}) \times t\underline{x} \, \mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie: Falls $\operatorname{div}(\underline{F}) = 0$, dann gilt $\underline{F} = \underline{\nabla} \times \underline{G}$.