Aufgabe 11.1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, also $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Hinweis: Schritt für Schritt beweisen:

(i) Es gilt $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

(ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt auch $f(x) < f(y)$.

(iii) Es gilt $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 11.2. Man berechne die Additions- und Multiplikationstabelle des Körpers $\mathbb{F}_4$ mit 4 Elementen. Hinweis: $X^2 + X + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.3. Berechnen Sie die Galois-Gruppe der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$, wobei ζ_5 eine primitive 5-te Einheitswurzel ist. Ist diese Körpererweiterung galois?

(4 Punkte)

Aufgabe 11.4. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^3 = 2$. Berechnen Sie die Galois-Gruppe der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_3, \alpha)/\mathbb{Q}(\zeta_3)$, wobei ζ_3 eine primitive 3-te Einheitswurzel ist. Ist diese Körpererweiterung galois?

(4 Punkte)

Aufgabe 11.5. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^4 = 2$. Berechnen Sie die Galois-Gruppe der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha, i)/\mathbb{Q}$ in dem Sie zeigen, dass sie isomorph zu einer Gruppe die in der Vorlesung schon vorgekommen ist. Ist diese Körpererweiterung galois?

(6 Bonus-Punkte)