Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 1

Aufgabe 1. (4 Punkte) Seien X, Y, Z Mengen. Man zeige die *de Morgan'sche Regel*

$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Man zeige:

1. Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv;
2. Sind g und f surjektiv, so auch $g \circ f$;
3. Genau dann ist f surjektiv, wenn für beliebige Abbildungen $g_1, g_2 : Y \to Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon folgt $g_1 = g_2$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für die Glieder der Folge, die mit $0, 0, 1$ beginnt und dem Bildungsgesetz

$$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad \text{für alle } n \geq 3$$

gehorcht.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Ein Anleger investiert 10.000€ in einen Renten-Fonds. Der Fonds wird am Ende jedes Jahres mit einem jährlichen Zinssatz von 2% verzinst und der Anleger zahlt zu Beginn jedes Jahres (ab dem zweiten Jahr) einen Beitrag von 1.000€ zu. Man finde eine geschlossene Formel für das gesamte Kapital nach n Jahren.

Abgabefrist: Donnerstag, den 30. Oktober um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 2

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei M ein Monoid und e sein neutrales Element. Man zeige: M ist genau dann eine Gruppe, wenn es für jedes $m \in M$ ein $\overline{m} \in M$ gibt mit $\overline{m} \cdot m = e$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei K ein Körper derart, dass es kein $x \in K$ gibt, mit $x^2 = -1$.

(i) Man zeige, dass $K \times K$ mit der Addition und Multiplikation gegeben durch

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d),\\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

ein Körper ist.

(ii) Man kürze $(a, 0)$ mit a und man setze $\mathrm{i} = (0, 1)$. Man zeige, dass für die Abbildung $\varphi : a + b\mathrm{i} \mapsto a - \mathrm{i}b$ gilt $\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w)$ und $\varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w)$ für alle z, w in unserem neuen Körper $K \times K$.

Ergänzung: Ersetzt man $K = \mathbb{R}$ (das Körper der reellen Zahlen), bekommt man als Ergebnis dieser Konstruktion der Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*. Die Abbildung $a + b\mathrm{i} \mapsto a - \mathrm{i}b$ heißt in diesem Fall die *komplexe Konjugation* und wird üblicherweise $z \mapsto \overline{z}$ notiert.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Man bestimme die Menge aller rationalen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 15x_1 - 3x_2 + 6x_4 = 6. \end{cases}$$

Aufgabe 4. (2 Punkte) Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \lambda x - 2y = 2 \\ 2x + (2 - 2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar und für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist es nicht lösbar?

Aufgabe 5. (4 Punkte) Für eine vorgegebene abelsche Gruppe $(V, +)$ gibt es höchstens eine Abbildung $\mathbb{Q} \times V \to V$ derart, dass sie mit dieser Abbildung als Multiplikation mit Skalaren ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum wird.

Abgabefrist: Donnerstag, den 6. November um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 3

Aufgabe 1. Seien k ein Körper und $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über k. Definieren wir auf dem kartesische Produkt $V_1 \times \cdots \times V_n$ komponentenweise eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren, in Formeln

$$\begin{aligned}(v_1, \ldots, v_n) + (v_1', \ldots, v_n') &= (v_1 + v_1', \ldots, v_n + v_n') \\ x \cdot (v_1, \ldots, v_n) &= (x \cdot v_1, \ldots, x \cdot v_n).\end{aligned}$$

(i) (2 Punkte) Man beweise, dass diese zwei Operationen $V_1 \times \cdots \times V_n$ zu einem k-Vektorraum machen. Er heißt die direkte Summe der $V_1, \ldots, V_n$, und wird $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ notiert.

(i) (2 Punkte) Man zeige die folgende Formel:

$$\dim_k(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) = \dim_k V_1 + \cdots + \dim_k V_n.$$

Insbesondere, da k^n die direkte Summe $\underbrace{k \oplus \cdots \oplus k}_{n \text{ mal}}$ ist, haben wir $\dim_k k^n = n$.

Aufgabe 2. (3 Punkte) Eine Teilmenge eines Vektorraums heißt eine **(lineare) Hyperebene** genau dann, wenn unsere Teilmenge ein echter Untervektorraum ist, der zusammen mit einem einzigen weiteren Vektor unseren ursprünglichen Vektorraum erzeugt. Man zeige, dass eine Hyperebene sogar zusammen mit *jedem* Vektor außerhalb besagter Hyperebene unseren ursprünglichen Vektorraum erzeugt.

Aufgabe 3. (i) (2 Punkte) Seien v, w zwei Vektoren in einem k-Vektorraum V. Man zeige, dass v, w linear abhängig sind genau dann, wenn es ein $\lambda \in k$ gibt mit $v = \lambda w$ oder $w = \lambda v$.

(ii) (3 Punkte) Es sind in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Teilmengen sind linear unabhängig: $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$?

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen (wie in der Aufgabe 2 von Blatt 2 definiert), und sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Durch die Vorschrift $av = (a, 0)v$ wird die abelsche Gruppe V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, den wir $V^{\mathbb{R}}$ notieren. Man zeige $\dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 13. November um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 4

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei G eine Gruppe. Man beweise, dass die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(1)$ eine Bijektion

$$\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$$

zwischen der Menge der Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}$ nach G und der Menge G selbst definiert.

Aufgabe 2. Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V.

(i) (2 Punkte) Man zeige, dass die Teilmenge $V^f = \{v \in V \mid f(v) = v\}$ der Fixpunkte von f ein Untervektorraum von V ist.

(ii) (2 Punkte) Sei f **idempotent** (das heißt, $f^2 = f$). Man zeige, dass gilt $V = V^f \oplus \ker f$.

Aufgabe 3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $f\colon V \to V$ der Endomorphismus $(x, y, z) \mapsto (y, x, 0)$.

(i) (3 Punkte) Man bestimme $\operatorname{im} f$, $\ker f$ und V^f.

(ii) (1 Punkt) Welche Untervektorräume von V werden von f in sich selbst überführt?

Aufgabe 4. (i) (2 Punkte) Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus (d.h. eine bijektive lineare Abbildung) von Vektorräumen. Man zeige, dass die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon W \to V$ auch ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

(ii) (2 Punkte) Sei V ein Vektorraum. Man zeige, dass die Menge $\mathrm{GL}(V)$ der Automorphismen von V mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Abgabefrist: Donnerstag, den 20. November um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 5

Aufgabe 1. (3 Punkte) Seien V, W Vektorräume über einem Körper k und sei $H \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Man zeige, dass man jede lineare Abbildung $f\colon H \to W$ zu einer linearen Abbildung $\tilde{f}\colon V \to W$ erweitern kann (so dass die Einschränkung $\tilde{f}_{|H}$ von f auf H mit f übereinstimmt).

Aufgabe 2. (i) (3 Punkte) Seien E, E' affine Räume und sei $\varphi\colon E \to E'$ eine affine Abbildung. Man zeige, dass für alle $p \in E'$ die Teilmenge $\varphi^{-1}(p) = \{x \in E \mid \varphi(x) = p\}$ entweder leer oder ein affiner Teilraum von E ist.

(ii) (2 Punkte) Sei E der 3-dimensionale reelle affine Raum $\mathbb{R}^3$. Man zeige, dass die Teilmenge $\{(x, y, z) \in E \mid 3x + y - 2z = 2\}$ ein affiner Teilraum von E ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Seien A, B affine Teilräume eines affinen Raums E, und sei C der von $A \cup B$ erzeugte affine Teilraum (d.h. der kleinste affine Unterraum von E, der $A \cup B$ umfasst). Man beweise die Dimensionsformel

$$\dim C = \begin{cases} \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) & \text{falls } A \cap B \neq \varnothing, \\ \dim A + \dim B - \dim(\vec{A} \cap \vec{B}) + 1 & \text{falls } A \cap B = \varnothing. \end{cases}$$

Aufgabe 4. (4 Punkte) Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper k. Wir erinnern daran, dass eine Abbildung $F\colon U \times V \to W$ **bilinear** heißt genau dann, wenn sie für jedes feste $v \in V$ linear ist in $u \in U$ und für jedes feste $u \in U$ linear ist in $v \in V$. Man bezeichne $\mathrm{Hom}_k^{(2)}(U \times V, W)$ die Menge aller solchen bilinearen Abbildungen.

Seien A eine Basis von U und B eine Basis von V. Man zeige, dass die Einschränkung eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_k^{(2)}(U \times V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ens}(A \times B, W)$$

liefert.

Abgabefrist: Donnerstag, den 27. November um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Man berechne die Inverse der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 11 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 5; \mathbb{Q}).$$

(i) Man finde Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4; \mathbb{Q})$ und $B \in \mathrm{Mat}(5 \times 5; \mathbb{Q})$, so dass AMB in Smith-Normalform ist.

(ii) Was ist der Rang von M?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei K ein Körper und seien $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p; K)$. Man zeige $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $V = \mathbb{R}^3$ der euklidische drei-dimensionale reelle Vektorraum mit Koordinaten x, y, z, und sei $f \colon V \to V$ die orthogonale Spiegelung an der Ebene $H \subset V$ definiert durch die Gleichung $x + y + z = 0$. Man schreibe die Matrix des Endomorphismus f bezüglich der Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

und bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3.

(Hinweis: Man bemerke, dass $v_1, v_2 \in H$ und dass v_3 orthogonal zu H ist.)

Abgabefrist: Donnerstag, den 4. Dezember um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Die **Spur** einer endlichen quadratischen Matrix M ist definiert als die Summe der Diagonaleinteräge von M und wird $\mathrm{tr}(M)$ notiert (nach dem englischen Begriff **trace**). Sei k ein Körper.

(i) Man zeige $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; k)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times m; k)$.

(ii) Man folgere die Identität $\mathrm{tr}(MAM^{-1})$ für $A, M \in \mathrm{Mat}(n \times n; k)$ mit M invertierbar.

Sei V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Man definiert die Spur $\mathrm{tr}(f)$ von f als die Spur seiner Matrix in Bezug auf eine und jede Basis.

(iii) Man beweise, dass $\mathrm{tr}(f)$ wohldefiniert ist (d.h. unabhängig von der Wahl einer Basis).

(iv) Sei W auch ein endlichdimensionaler k-Vektorraum. Für lineare Abbildungen $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to V$ man zeige, dass $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** In $V = \mathbb{Q}^3$ sei $\mathcal{B}$ die angeordnete Basis der Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

und sei $\mathcal{A}$ die Standardbasis. In dem Dualraum $V^\top$ seien $\mathcal{B}^\top$ und $\mathcal{A}^\top$ die dualen Basen zu $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A}$. Man bestimme die Basis-Wechsel-Matrizen ${}_{\mathcal{A}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{A}}$ zwischen den Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V und die Basis-Wechsel-Matrizen ${}_{\mathcal{A}^\top}[\mathrm{id}_{V^\top}]_{\mathcal{B}^\top}$ und ${}_{\mathcal{B}^\top}[\mathrm{id}_{V^\top}]_{\mathcal{A}^\top}$ zwischen den Basen $\mathcal{A}^\top$ und $\mathcal{B}^\top$ vom Dualraum $V^\top$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Man zeige: Gegeben ein Vektorraum V ist die Verknüpfung

$$V^\top \xrightarrow{\mathrm{ev}_{V^\top}} V^{\top\top\top} \xrightarrow{\mathrm{ev}_V^\top} V^\top$$

der Auswertungsabbildung zum Dualraum von V mit der Transponierten der Auswertungsabbildung von V die Identität auf dem Dualraum von V.

Aufgabe 4. (i) (2 Punkte) Gegeben eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ zeige man für Real- und Imaginärteil ihrer Inversen die Formeln $\mathrm{Re}(z^{-1}) = x/(x^2 + y^2)$ und $\mathrm{Im}(z^{-1}) = -y/(x^2 + y^2)$.

(ii) (2 Punkte) Man bestimme alle komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 11. Dezember um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 8

Aufgabe 1. (i) (2 Punkte) Mit Hilfe des euklidischen Algorithmus finde man den größten gemeinsamen Teiler c von 4095 und 2288, und schreibe c als Linearkombination von 4095 und 2288 mit ganzzahligen Koeffizienten.

(ii) (2 Punkte) Man bestimme das Inverse von 4 im Körper $\mathbb{F}_{17}$.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Man zeige: Eine natürliche Zahl ist durch 11 teilbar genau dann, wenn ihre „alternierende Quersumme“ durch 11 teilbar ist.

Aufgabe 3. (2 Punkte) Man zeige: Eine natürliche Zahl, die kongruent zu sieben ist modulo acht, kann nicht eine Summe von drei Quadraten sein.

Aufgabe 4. (2 Punkte) Sei $f: k \to R$ ein Ringhomomorphismus von einem Körper k in einem vom Nullring verschiedenen Ring R. Man zeige, dass f injektiv ist.

Aufgabe 5. (4 Punkte) Wieviele Untervektorräume hat ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Körper mit fünf Elementen? Wieviele angeordnete Basen?

Aufgabe 6. (2 Punkte) Man zeige: Gegeben ein Vektorraum über einem endlichen Primkörper $\mathbb{F}_p$ sind seine Untervektorräume genau die Untergruppen der zugrundeliegenden abelschen Gruppe.

Abgabefrist: Donnerstag, den 18. Dezember um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 9

Weihnachtsblatt (Bonus)

Aufgabe 1. (4 Punkte) Man zerlege das Polynom $X^8 + X^6 - X^2 - 1$ in $\mathbb{R}[X]$ als Produkt von linearen und quadratischen Faktoren, so dass die quadratischen Faktoren keine reellen Nullstellen haben.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Man zeige, dass es in einem endlichen Körper $\mathbb{F}$ einer von 2 verschiedenen Charakteristik genau $(|\mathbb{F}|+1)/2$ Quadrate gibt, wohingegen in einem endlichen Körper der Charakteristik 2 jedes Element das Quadrat eines weiteren Elements ist.

Aufgabe 3 (Der **Frobenius-Homomorphismus**)**.** Sei R ein kommutativer Ring, dessen Charakteristik eine Primzahl p ist, für den es also einen Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to R$ gibt. Sei $\varphi\colon R \to R$ die Abbildung definiert durch die Vorschrift $\varphi(a) = a^p$.

(i) (2 Punkte) Man zeige, dass φ ein Ringhomomorphismus von R in sich selbst ist. *Hinweis: man verwende die binomische Formel für die Darstellung von* $(a+b)^p$.

(ii) (2 Punkte) Sei $R = k$ ein Körper der Charakteristik p. Man zeige, dass φ höchstens p Fixpunkte hat.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, und sei $\mathbf{C}_n = \{z \in k \mid z^n = 1\}$ die Teilmenge der n-ten Einheitswurzeln in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null.

(i) (2 Punkte) Man zeige, dass $\mathbf{C}_n$ eine (multiplikative) Untergruppe von $k^\times$ ist.

(ii) (2 Punkte) Man zeige, dass $\mathbf{C}_n$ höchstens n Elemente hat.

(iii) (2 Punkte) Man zeige, dass 1 als Nullstelle vom Polynom $X^n - 1 \in k[X]$ Vielfachheit 1 hat.

(iv) (2 Punkte) Sei $\zeta \in \mathbf{C}_n$. Man zeige, dass die Vielfachheiten von ζ und 1 als Nullstellen von $X^n - 1$ übereinstimmen.

(v) (2 Punkte) Man folge, dass $\mathbf{C}_n$ eine Gruppe mit genau n Elementen ist.

Aufgabe 5. Gegeben ein Ring K sei $K[\![X]\!]$ der Ring der **formalen Potenzenreihen** mit Koffizienten in K der Gestalt $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ mit $a_n \in K$ mit den Operationen

$$(*) \quad \sum_{n\geq 0} a_n X^n + \sum_{n\geq 0} b_n X^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) X^n, \qquad \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right) = \sum_{n\geq 0} \sum_{i+j=n} (a_i b_j) X^n.$$

(i) (2 Punkte) Man zeige, dass $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in K[\![X]\!]$ genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \in K^\times$. Man bestimme das Inverse von $1 - X$ in $K[\![X]\!]$.

Sei $K((X))$ der Ring der **formalen Laurentreihen** mit Koeffizienten in K der Gestalt $\sum_{n\geq -N} a_n X^n$ mit $a_n \in K$ und $N \in \mathbb{N}$. Um die zwei Operationen $+$ und $\cdot$ zu definieren, ersetze man 0 durch $-N$ in (*) oben.

(ii) (2 Punkte) Sei k ein Körper. Man zeige, dass dann $k((X))$ ein Körper ist.

(iii) (2 Punkte) Man zeige, dass die von der universellen Eigenschaft herrührende Abbildung ein Isomorphismus $\operatorname{Quot}(k[\![X]\!]) \xrightarrow{\sim} k((X))$ ist.

(iv) (2 Punkte) Man zeige, dass der natürliche Ringhomomorphismus $k[X] \to k[\![X]\!]$ eindeutig zu einer Inklusion der Quotientenkörper $k(X) \to k((X))$ erweitert werden kann.

(v) (2 Punkte) Man bestimme das Bild von $X^7/((1-X)(2-X))$ unter dieser Inklusion.

Abgabefrist: Donnerstag, den 8. Januar 2015 um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 10

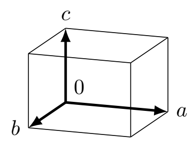
Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Man bestimme das Signum der Permutationen $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ gegeben durch

$$\sigma : i \mapsto n - i + 1 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \tau : \begin{cases} i \mapsto i + 1 & (i = 1, \ldots, n-1), \\ n \mapsto 1. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Man zeige, dass die Transpositionen $(i, i+1)$ für $i = 1, \ldots, n-1$ die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ erzeugen. (Das heißt, dass jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sich darstellen lässt als eine Verknüpfung von Transpositionen benachbarter Elemente).

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Man berechne das Volumen des Parallelepipeds mit Kanten

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Man zeige die folgende Formel für die Determinante einer block-oberen Dreiecksmatrix:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & \star \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det(A) \det(B)$$

für $A \in \mathrm{Mat}(m; k)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n; k)$ über einem Körper k.

Aufgabe 5. Gegeben Vektorräume $V_1, \ldots, V_n, W$ über einem Körper k sei $\mathrm{Hom}_k^{(n)}(V_1 \times \cdots \times V_n, W)$ die Menge aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_n \to W$.

(i) (1 Punkt) Man zeige, dass $\mathrm{Hom}_k^{(n)}(V_1 \times \cdots \times V_n, W)$ auf natürlicher Weise ein Vektorraum ist.

(ii) (1 Punkt) Im Fall $V_1 = V_2 = \cdots = V_n$ zeige man, dass die Teilmenge aller alternierenden Abbildungen ein Untervektorraum ist.

(iii) (1 Punkt) Sei V ein k-Vektorraum der endlichen Dimension $\dim_k V = n$. Welche Dimension hat der Raum der alternierenden multilinearen Abbildungen $V^n \to k$?

Abgabefrist: Donnerstag, den 15. Januar um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 11

Aufgabe 1. (**Nullstellensatz für lineare Hyperebenen**, 3 Punkte) Sei k ein unendlicher Körper. Für eine Linearform $f \in (k^d)^\top$ sei $H_f = \{\boldsymbol{X} \in k^d \mid f(\boldsymbol{X}) = 0\}$ die durch f definierte Hyperebene. Man zeige: Verschwindet ein Polynom $p \in k[X_1, \ldots, X_d]$ auf H_f, so wird es von f geteilt. *Hinweis: Man ziehe sich in einem ersten Schritt auf den Fall $f(\boldsymbol{x}) = x_1$ zurück.*

Aufgabe 2. (3 Punkte) Sei k ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $X_0, \ldots, X_n \in k$. Man zeige die folgende Formel für die Determinante der **van-der-Monde Matrix**:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & X_0 & X_0^2 & \ldots & X_0^n \\ 1 & X_1 & X_1^2 & \ldots & X_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n & X_n^2 & \ldots & X_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (X_i - X_j).$$

Hinweis: Man nehme zuerst $k = \mathbb{Q}$ an und benutze die Aufgabe 1.

Aufgabe 3. (1+2+2+1 Punkte) Sei $A \in \operatorname{Mat}(4; \mathbb{Q})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Man berechne das charakteristische Polynom von A.
(ii) Man bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A.
(iii) Ist A triagonalisierbar? Falls so, finde man eine Basis $\mathcal{B}$, bezüglich derer die Matrix ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ von der durch A gegebenen linearen Abbildung f obere Dreiecksgestalt hat.
(iv)* Ist A diagonalisierbar? Falls so, finde man eine Basis $\mathcal{B}'$, bezüglich derer die Matrix ${}_{\mathcal{B}'}[f]_{\mathcal{B}'}$ diagonal ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

(i) Sei V ein Vektorraum über einem Körper einer von zwei verschiedenen Charakteristik und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f^2 = \mathrm{id}_V$. Man zeige: f ist diagonalisierbar und hat keine Eigenwerte außer ± 1.
(ii)* Für $k = \mathbb{F}_2$, finde man eine lineare Abbildung $g\colon k^2 \to k^2$ mit $g^2 = \mathrm{id}_{k^2}$, die nicht diagonalisierbar ist.

Abgabefrist: Donnerstag, den 22. Januar um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 12

Hinweis: Die Anmeldefrist für die Prüfungen zu den Mathematik-Vorlesungen in den Mathematik-Studiengängen läuft bis 25. Januar.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $f\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus eines Vektorraums V. Sei $v_0 \in V$ und

$$v_i = f^i(v_0) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{i \text{ mal}}(v_0).$$

Sei $k \geq 0$ der kleinste Index für den gilt $v_k = 0$. Man zeige, dass $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2. (1+2 Punkte)

(i) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper k, und f ein linearer Endomorphismus von V. Man zeige, dass der konstante Term des charakteristischen Polynoms $\chi_f(\lambda)$ genau $\det(f)$ ist.

(ii) Man zeige: jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums mit negativer Determinante besitzt einen negativen reellen Eigenwert. *Hinweis: Zwischenwertsatz.*

Aufgabe 3. (2 Punkte) Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Cayley-Hamilton Theorems berechne man die Inverse von A und schreibe man sie als Linearkombination von E, A und A^2.

Aufgabe 4. (3 Punkte) Sei V ein vierdimensionaler Vektorraum und sei f ein Endomorphismus von V, dessen charakteristisches Polynom $\chi_f(\lambda)$ vier paarweise verschiedene Nullstellen in k hat. Wieviele unter f stabile Untervektorräume besitzt V?

Aufgabe 5. (4 Punkte) Sei E eine euklidische Kongruenzebene und $\langle\ ,\ \rangle$ ein invariantes Skalarprodukt auf ihrem Richtungsraum $\vec{E}$. Man zeige, dass für zwei Vektoren $v, w \in \vec{E}$ gleichbedeutend sind:

(a) Es gibt eine Richtungskongruenz r mit $r(v) = v$ und $r(w) = -w$.
(b) Es gilt $\langle v, w\rangle = 0$.
(c) (Satz des Pythagoras) Es gilt $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

(Haben zwei Richtungsvektoren diese äquivalenten Eigenschaften, so heissen sie **orthogonal**.)

Abgabefrist: Donnerstag, den 29. Januar um 8.00 Uhr.

Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 13

Aufgabe 1 (1+1+2+2 Punkte)**.** Sei E der zweidimensionale reelle affine Raum $\mathbb{C}$. Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ sei $D^{\pm}_{a,b} \colon E \to E$ die Abbildung definiert durch die Vorschrift:

$$D^{+}_{a,b} z = az + b \text{ beziehungsweise } D^{+}_{a,b} z = a\bar{z} + b$$

(i) Man zeige, dass $D^{\pm}_{a,b}$ affin ist, und man bestimme ihren linearen Anteil.
(ii) Man zeige dass die Menge $K = \{D^{\pm}_{a,b} \mid |a| = 1\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aff}^{\times}(E)$ ist.
(iii) Man zeige, dass K eine Kongruenzgruppe von E ist. Damit ist also (E, K) eine Kongruenzebene.
(iv) Sei $\vec{K}$ die Gruppe der linearen Anteile der Abbildungen aus K. Man bestimme die unter $\vec{K}$ invarianten Skalarprodukte auf $\vec{E}$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Sei V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Man zeige die **Parallelogrammregel** $2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = \|v - w\|^2 + \|v + w\|^2$ für alle $v, w \in V$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Man zeige, dass die Vorschrift

$$\langle p(X), q(X) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ der Polynome mit reellen Koeffizienten definiert.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Seien V, L Vektorräume mit $\dim L = 1$. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $l \in L$ ein von null verschiedener Vektor. Man zeige, dass $(v_i \otimes l)_{i \in I}$ eine Basis von $V \otimes L$ ist. Insbesondere gilt $\dim(V \otimes L) = \dim V$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Sei L ein eindimensionaler Vektorraum über einem Körper k. Man zeige, dass es genau einen Vektorraumisomorphismus $L \otimes L^{\perp} \to k$ mit $l \otimes f \mapsto f(l)$ für alle $l \in L, f \in L^{\perp}$ gibt.

Abgabefrist: Donnerstag, den 05. Februar um 8.00 Uhr.