Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 10

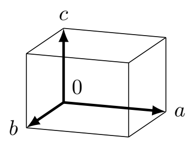
Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Man bestimme das Signum der Permutationen $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ gegeben durch

$$\sigma : i \mapsto n - i + 1 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \tau : \begin{cases} i \mapsto i + 1 & (i = 1, \ldots, n-1), \\ n \mapsto 1. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Man zeige, dass die Transpositionen $(i, i+1)$ für $i = 1, \ldots, n-1$ die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ erzeugen. (Das heißt, dass jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sich darstellen lässt als eine Verknüpfung von Transpositionen benachbarter Elemente).

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Man berechne das Volumen des Parallelepipeds mit Kanten

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Man zeige die folgende Formel für die Determinante einer block-oberen Dreiecksmatrix:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & \star \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det(A) \det(B)$$

für $A \in \mathrm{Mat}(m; k)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n; k)$ über einem Körper k.

Aufgabe 5. Gegeben Vektorräume $V_1, \ldots, V_n, W$ über einem Körper k sei $\mathrm{Hom}_k^{(n)}(V_1 \times \cdots \times V_n, W)$ die Menge aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_n \to W$.

(i) (1 Punkt) Man zeige, dass $\mathrm{Hom}_k^{(n)}(V_1 \times \cdots \times V_n, W)$ auf natürlicher Weise ein Vektorraum ist.

(ii) (1 Punkt) Im Fall $V_1 = V_2 = \cdots = V_n$ zeige man, dass die Teilmenge aller alternierenden Abbildungen ein Untervektorraum ist.

(iii) (1 Punkt) Sei V ein k-Vektorraum der endlichen Dimension $\dim_k V = n$. Welche Dimension hat der Raum der alternierenden multilinearen Abbildungen $V^n \to k$?

Abgabefrist: Donnerstag, den 15. Januar um 8.00 Uhr.