Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 12

Hinweis: Die Anmeldefrist für die Prüfungen zu den Mathematik-Vorlesungen in den Mathematik-Studiengängen läuft bis 25. Januar.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei $f\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus eines Vektorraums V. Sei $v_0 \in V$ und

$$v_i = f^i(v_0) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{i \text{ mal}}(v_0).$$

Sei $k \geq 0$ der kleinste Index für den gilt $v_k = 0$. Man zeige, dass $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2. (1+2 Punkte)

(i) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper k, und f ein linearer Endomorphismus von V. Man zeige, dass der konstante Term des charakteristischen Polynoms $\chi_f(\lambda)$ genau $\det(f)$ ist.

(ii) Man zeige: jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums mit negativer Determinante besitzt einen negativen reellen Eigenwert. *Hinweis: Zwischenwertsatz.*

Aufgabe 3. (2 Punkte) Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Cayley-Hamilton Theorems berechne man die Inverse von A und schreibe man sie als Linearkombination von E, A und A^2.

Aufgabe 4. (3 Punkte) Sei V ein vierdimensionaler Vektorraum und sei f ein Endomorphismus von V, dessen charakteristisches Polynom $\chi_f(\lambda)$ vier paarweise verschiedene Nullstellen in k hat. Wieviele unter f stabile Untervektorräume besitzt V?

Aufgabe 5. (4 Punkte) Sei E eine euklidische Kongruenzebene und $\langle\, , \rangle$ ein invariantes Skalarprodukt auf ihrem Richtungsraum $\vec{E}$. Man zeige, dass für zwei Vektoren $v, w \in \vec{E}$ gleichbedeutend sind:

(a) Es gibt eine Richtungskongruenz r mit $r(v) = v$ und $r(w) = -w$.
(b) Es gilt $\langle v, w \rangle = 0$.
(c) (Satz des Pythagoras) Es gilt $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

(Haben zwei Richtungsvektoren diese äquivalenten Eigenschaften, so heissen sie **orthogonal**.)

Abgabefrist: Donnerstag, den 29. Januar um 8.00 Uhr.