Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 2

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei M ein Monoid und e sein neutrales Element. Man zeige: M ist genau dann eine Gruppe, wenn es für jedes $m \in M$ ein $\overline{m} \in M$ gibt mit $\overline{m} \cdot m = e$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei K ein Körper derart, dass es kein $x \in K$ gibt, mit $x^2 = -1$.

(i) Man zeige, dass $K \times K$ mit der Addition und Multiplikation gegeben durch

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

ein Körper ist.

(ii) Man kürze $(a, 0)$ mit a und man setze $\mathrm{i} = (0, 1)$. Man zeige, dass für die Abbildung $\varphi : a + b\mathrm{i} \mapsto a - \mathrm{i}b$ gilt $\varphi(z + w) = \varphi(z) + \varphi(w)$ und $\varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w)$ für alle z, w in unserem neuen Körper $K \times K$.

Ergänzung: Ersetzt man $K = \mathbb{R}$ (das Körper der reellen Zahlen), bekommt man als Ergebnis dieser Konstruktion der Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*. Die Abbildung $a + b\mathrm{i} \mapsto a - \mathrm{i}b$ heißt in diesem Fall die *komplexe Konjugation* und wird üblicherweise $z \mapsto \overline{z}$ notiert.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Man bestimme die Menge aller rationalen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 15x_1 - 3x_2 + 6x_4 = 6. \end{cases}$$

Aufgabe 4. (2 Punkte) Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \lambda x - 2y = 2 \\ 2x + (2 - 2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar und für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist es nicht lösbar?

Aufgabe 5. (4 Punkte) Für eine vorgegebene abelsche Gruppe $(V, +)$ gibt es höchstens eine Abbildung $\mathbb{Q} \times V \to V$ derart, dass sie mit dieser Abbildung als Multiplikation mit Skalaren ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum wird.

Abgabefrist: Donnerstag, den 6. November um 8.00 Uhr.