Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 3

Aufgabe 1. Seien k ein Körper und $V_1, \dots, V_n$ Vektorräume über k. Definieren wir auf dem kartesische Produkt $V_1 \times \dots \times V_n$ komponentenweise eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren, in Formeln

$$\begin{aligned}(v_1, \dots, v_n) + (v'_1, \dots, v'_n) &= (v_1 + v'_1, \dots, v_n + v'_n)\\ x \cdot (v_1, \dots, v_n) &= (x \cdot v_1, \dots, x \cdot v_n).\end{aligned}$$

(i) (2 Punkte) Man beweise, dass diese zwei Operationen $V_1 \times \dots \times V_n$ zu einem k-Vektorraum machen. Er heißt die direkte Summe der $V_1, \dots, V_n$, und wird $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ notiert.

(i) (2 Punkte) Man zeige die folgende Formel:

$$\dim_k(V_1 \oplus \dots \oplus V_n) = \dim_k V_1 + \dots + \dim_k V_n.$$

Insbesondere, da k^n die direkte Summe $\underbrace{k \oplus \dots \oplus k}_{n \text{ mal}}$ ist, haben wir $\dim_k k^n = n$.

Aufgabe 2. (3 Punkte) Eine Teilmenge eines Vektorraums heißt eine **(lineare) Hyperebene** genau dann, wenn unsere Teilmenge ein echter Untervektorraum ist, der zusammen mit einem einzigen weiteren Vektor unseren ursprünglichen Vektorraum erzeugt. Man zeige, dass eine Hyperebene sogar zusammen mit *jedem* Vektor außerhalb besagter Hyperebene unseren ursprünglichen Vektorraum erzeugt.

Aufgabe 3. (i) (2 Punkte) Seien v, w zwei Vektoren in einem k-Vektorraum V. Man zeige, dass v, w linear abhängig sind genau dann, wenn es ein $\lambda \in k$ gibt mit $v = \lambda w$ oder $w = \lambda v$.

(ii) (3 Punkte) Es sind in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Teilmengen sind linear unabhängig: $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$?

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen (wie in der Aufgabe 2 von Blatt 2 definiert), und sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Durch die Vorschrift $av = (a, 0)v$ wird die abelsche Gruppe V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, den wir $V^{\mathbb{R}}$ notieren. Man zeige $\dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 13. November um 8.00 Uhr.