Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 4

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei G eine Gruppe. Man beweise, dass die Vorschrift $\varphi \mapsto \varphi(1)$ eine Bijektion

$$\mathrm{Grp}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$$

zwischen der Menge der Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}$ nach G und der Menge G selbst definiert.

Aufgabe 2. Sei $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V.

(i) (2 Punkte) Man zeige, dass die Teilmenge $V^f = \{v \in V \mid f(v) = v\}$ der Fixpunkte von f ein Untervektorraum von V ist.

(ii) (2 Punkte) Sei f **idempotent** (das heißt, $f^2 = f$). Man zeige, dass gilt $V = V^f \oplus \ker f$.

Aufgabe 3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $f \colon V \to V$ der Endomorphismus $(x, y, z) \mapsto (y, x, 0)$.

(i) (3 Punkte) Man bestimme $\operatorname{im} f$, $\ker f$ und V^f.

(ii) (1 Punkt) Welche Untervektorräume von V werden von f in sich selbst überführt?

Aufgabe 4. (i) (2 Punkte) Sei $f \colon V \to W$ ein Isomorphismus (d.h. eine bijektive lineare Abbildung) von Vektorräumen. Man zeige, dass die Umkehrabbildung $f^{-1} \colon W \to V$ auch ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

(ii) (2 Punkte) Sei V ein Vektorraum. Man zeige, dass die Menge $\mathrm{GL}(V)$ der Automorphismen von V mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Abgabefrist: Donnerstag, den 20. November um 8.00 Uhr.