Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 5

Aufgabe 1. (3 Punkte) Seien V, W Vektorräume über einem Körper k und sei $H \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Man zeige, dass man jede lineare Abbildung $f\colon H \to W$ zu einer linearen Abbildung $\tilde{f}\colon V \to W$ erweitern kann (so dass die Einschränkung $\tilde{f}_{|H}$ von f auf H mit f übereinstimmt).

Aufgabe 2. (i) (3 Punkte) Seien E, E' affine Räume und sei $\varphi\colon E \to E'$ eine affine Abbildung. Man zeige, dass für alle $p \in E'$ die Teilmenge $\varphi^{-1}(p) = \{x \in E \mid \varphi(x) = p\}$ entweder leer oder ein affiner Teilraum von E ist.

(ii) (2 Punkte) Sei E der 3-dimensionale reelle affine Raum $\mathbb{R}^3$. Man zeige, dass die Teilmenge $\{(x, y, z) \in E \mid 3x + y - 2z = 2\}$ ein affiner Teilraum von E ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Seien A, B affine Teilräume eines affinen Raums E, und sei C der von $A \cup B$ erzeugte affine Teilraum (d.h. der kleinste affine Unterraum von E, der $A \cup B$ umfasst). Man beweise die Dimensionsformel

$$\dim C = \begin{cases} \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) & \text{falls } A \cap B \neq \varnothing, \\ \dim A + \dim B - \dim(\vec{A} \cap \vec{B}) + 1 & \text{falls } A \cap B = \varnothing. \end{cases}$$

Aufgabe 4. (4 Punkte) Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper k. Wir erinnern daran, dass eine Abbildung $F\colon U \times V \to W$ **bilinear** heißt genau dann, wenn sie für jedes feste $v \in V$ linear ist in $u \in U$ und für jedes feste $u \in U$ linear ist in $v \in V$. Man bezeichne $\operatorname{Hom}_k^{(2)}(U \times V, W)$ die Menge aller solchen bilinearen Abbildungen.

Seien A eine Basis von U und B eine Basis von V. Man zeige, dass die Einschränkung eine Bijektion

$$\operatorname{Hom}_k^{(2)}(U \times V, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ens}(A \times B, W)$$

liefert.

Abgabefrist: Donnerstag, den 27. November um 8.00 Uhr.