Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Die **Spur** einer endlichen quadratischen Matrix M ist definiert als die Summe der Diagonaleineträge von M und wird $\operatorname{tr}(M)$ notiert (nach dem englischen Begriff **trace**). Sei k ein Körper.

(i) Man zeige $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ für alle $A \in \operatorname{Mat}(m \times n; k)$ und $B \in \operatorname{Mat}(n \times m; k)$.

(ii) Man folgere die Identität $\operatorname{tr}(MAM^{-1})$ für $A, M \in \operatorname{Mat}(n \times n; k)$ mit M invertierbar.

Sei V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Man definiert die Spur $\operatorname{tr}(f)$ von f als die Spur seiner Matrix in Bezug auf eine und jede Basis.

(iii) Man beweise, dass $\operatorname{tr}(f)$ wohldefiniert ist (d.h. unabhängig von der Wahl einer Basis).

(iv) Sei W auch ein endlichdimensionaler k-Vektorraum. Für lineare Abbildungen $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to V$ man zeige, dass $\operatorname{tr}(f \circ g) = \operatorname{tr}(g \circ f)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** In $V = \mathbb{Q}^3$ sei $\mathcal{B}$ die angeordnete Basis der Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

und sei $\mathcal{A}$ die Standardbasis. In dem Dualraum $V^\top$ seien $\mathcal{B}^\top$ und $\mathcal{A}^\top$ die dualen Basen zu $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A}$. Man bestimme die Basis-Wechsel-Matrizen ${}_{\mathcal{A}}[\operatorname{id}_V]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[\operatorname{id}_V]_{\mathcal{A}}$ zwischen den Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V und die Basis-Wechsel-Matrizen ${}_{\mathcal{A}^\top}[\operatorname{id}_{V^\top}]_{\mathcal{B}^\top}$ und ${}_{\mathcal{B}^\top}[\operatorname{id}_{V^\top}]_{\mathcal{A}^\top}$ zwischen den Basen $\mathcal{A}^\top$ und $\mathcal{B}^\top$ vom Dualraum $V^\top$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Man zeige: Gegeben ein Vektorraum V ist die Verknüpfung

$$V^\top \xrightarrow{\operatorname{ev}_{V^\top}} V^{\top\top\top} \xrightarrow{\operatorname{ev}_V^\top} V^\top$$

der Auswertungsabbildung zum Dualraum von V mit der Transponierten der Auswertungsabbildung von V die Identität auf dem Dualraum von V.

Aufgabe 4. (i) (2 Punkte) Gegeben eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ zeige man für Real- und Imaginärteil ihrer Inversen die Formeln $\operatorname{Re}(z^{-1}) = x/(x^2 + y^2)$ und $\operatorname{Im}(z^{-1}) = -y/(x^2 + y^2)$.

(ii) (2 Punkte) Man bestimme alle komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$.

Abgabefrist: Donnerstag, den 11. Dezember um 8.00 Uhr.