Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Antonio Sartori

Universität Freiburg
WS 2014/2015

Übungen zu Lineare Algebra I – Blatt 9

Weihnachtsblatt (Bonus)

Aufgabe 1. (4 Punkte) Man zerlege das Polynom $X^8 + X^6 - X^2 - 1$ in $\mathbb{R}[X]$ als Produkt von linearen und quadratischen Faktoren, so dass die quadratischen Faktoren keine reellen Nullstellen haben.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Man zeige, dass es in einem endlichen Körper $\mathbb{F}$ einer von 2 verschiedenen Charakteristik genau $(|\mathbb{F}|+1)/2$ Quadrate gibt, wohingegen in einem endlichen Körper der Charakteristik 2 jedes Element das Quadrat eines weiteren Elements ist.

Aufgabe 3 (Der **Frobenius-Homomorphismus**)**.** Sei R ein kommutativer Ring, dessen Charakteristik eine Primzahl p ist, für den es also einen Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to R$ gibt. Sei $\varphi\colon R \to R$ die Abbildung definiert durch die Vorschrift $\varphi(a) = a^p$.

(i) (2 Punkte) Man zeige, dass φ ein Ringhomomorphismus von R in sich selbst ist. *Hinweis: man verwende die binomische Formel für die Darstellung von* $(a + b)^p$.
(ii) (2 Punkte) Sei $R = k$ ein Körper der Charakteristik p. Man zeige, dass φ höchstens p Fixpunkte hat.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, und sei $\mathbf{C}_n = \{z \in k \mid z^n = 1\}$ die Teilmenge der n-ten Einheitswurzeln in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null.

(i) (2 Punkte) Man zeige, dass $\mathbf{C}_n$ eine (multiplikative) Untergruppe von $k^\times$ ist.
(ii) (2 Punkte) Man zeige, dass $\mathbf{C}_n$ höchstens n Elemente hat.
(iii) (2 Punkte) Man zeige, dass 1 als Nullstelle vom Polynom $X^n - 1 \in k[X]$ Vielfachheit 1 hat.
(iv) (2 Punkte) Sei $\zeta \in \mathbf{C}_n$. Man zeige, dass die Vielfachheiten von ζ und 1 als Nullstellen von $X^n - 1$ übereinstimmen.
(v) (2 Punkte) Man folge, dass $\mathbf{C}_n$ eine Gruppe mit genau n Elementen ist.

Aufgabe 5. Gegeben ein Ring K sei $K[\![X]\!]$ der Ring der **formalen Potenzenreihen** mit Koffizienten in K der Gestalt $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ mit $a_n \in K$ mit den Operationen

$$(*) \quad \sum_{n\geq 0} a_n X^n + \sum_{n\geq 0} b_n X^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) X^n, \qquad \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right) = \sum_{n\geq 0} \sum_{i+j=n} (a_i b_j) X^n.$$

(i) (2 Punkte) Man zeige, dass $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in K[\![X]\!]$ genau dann invertierbar ist, wenn $a_0 \in K^\times$. Man bestimme das Inverse von $1 - X$ in $K[\![X]\!]$.

Sei $K((X))$ der Ring der **formalen Laurentreihen** mit Koeffizienten in K der Gestalt $\sum_{n\geq -N} a_n X^n$ mit $a_n \in K$ und $N \in \mathbb{N}$. Um die zwei Operationen $+$ und $\cdot$ zu definieren, ersetze man 0 durch $-N$ in (*) oben.

(ii) (2 Punkte) Sei k ein Körper. Man zeige, dass dann $k((X))$ ein Körper ist.
(iii) (2 Punkte) Man zeige, dass die von der universellen Eigenschaft herrührende Abbildung ein Isomorphismus $\mathrm{Quot}(k[\![X]\!]) \xrightarrow{\sim} k((X))$ ist.
(iv) (2 Punkte) Man zeige, dass der natürliche Ringhomomorphismus $k[X] \to k[\![X]\!]$ eindeutig zu einer Inklusion der Quotientenkörper $k(X) \to k((X))$ erweitert werden kann.
(v) (2 Punkte) Man bestimme das Bild von $X^7/((1 - X)(2 - X))$ unter dieser Inklusion.

Abgabefrist: Donnerstag, den 8. Januar 2015 um 8.00 Uhr.