Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2025

Endliche Einfache Gruppen

Blatt 1

Abgabe: **05.05.2025**

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

Sei G eine abelsche Gruppe:

(a) Gegeben eine natürliche Zahl m aus $\mathbb{N}$, zeige, dass die Abbildung $G \to G$ mit $g \mapsto g^m$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Betrachte nun Elemente g und h aus G (von endlicher Ordnung) mit $\mathrm{ord}(g)$ und $\mathrm{ord}(h)$ teilerfremd. Zeige, dass G ein Element der Ordnung $\mathrm{ord}(g) \cdot \mathrm{ord}(h)$ besitzt.

(c) Für eine Primzahl p ist die *p-Torsion* von G als $\mathrm{Tor}_p(G) = \{g \in G \mid \ \mathrm{ord}(g) \text{ ist eine } p\text{-Potenz}\}$ definiert.

Folgere aus (b), dass $(\mathrm{Tor}_p(G))_{p \text{ Primzahl}}$ eine Familie transversaler Untergruppen ist.

(d) Zeige induktiv über $n \geq 2$, dass, wenn die natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ keinen gemeinsamen Faktor haben, es ganze Zahlen $b_1, \ldots, b_n$ gibt mit $1 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$.

(e) Sei nun G endlich. Folgere aus (d), dass die Gruppe G das innere direkte Produkt ihrer p-Torsionen ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

(a) Bestimme bis auf Isomorphie alle endlichen abelschen Gruppen mit 4 Elementen, ohne die Charakterisierung endlicher abelscher Gruppen zu verwenden.

(b) Bestimme nun bis auf Isomorphie alle endlichen abelschen Gruppen der Mächtigkeit 8, ohne die Charakterisierung endlicher abelscher Gruppen zu verwenden.

Hinweis: Wenn G eine Untergruppe H mit 4 Elementen hat, begründe, dass $\{g^2\}_{g \in G}$ in H liegt. Welche Werte kann $\mathrm{ord}(g^2)$ annehmen?

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

(a) Bestimme alle abelschen Gruppen der Mächtigkeit 196.

(b) Bestimme alle abelschen Gruppen der Mächtigkeit $3969 = 7^2 \cdot 3^4$.

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 3.18 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.