Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Charlotte Bartnick — Sommersemester 2025

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 10
Abgabe: 14.07.2025, 10 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.**
Gegeben eine endliche Gruppe G der Ordnung n sei $\varphi : G \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ eine Repräsentation vom Grad m.

a) Beweise, dass die Matrizen $\varphi(g)$ für g aus G alle diagonalisierbar sind. Schließe daraus, dass $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$.

   Hinweis: Diagonalisierbarkeitskriterium nach dem Minimalpolynom.

b) Folgere mit Aufgabe 4 von Blatt 9, dass für den Wert $\chi(g)$ des zu φ gehörigen Charakters χ gilt, dass $|\chi(g)| \leq m$. Des Weiteren gilt

$$|\chi(g)| = m \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(g) = \lambda \cdot Id \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}^\times.$$

Aufgabe 2 (9 Punkte)**.**
Betrachte eine endliche abelsche Gruppe G mit einer Repräsentation $\varphi : G \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ vom Grad m.

a) Zeige, dass die Matrizen $\{\varphi(g)\}_{g\in G}$ miteinander kommutieren.

b) Seien $A_1, \dots A_n$ beliebige invertierbare $m \times m$ Matrizen über einem Körper K, welche diagonalisierbar sind und miteinander kommutieren. Zeige induktiv über n, dass es eine Basis von K^m gibt, welche alle A_i gleichzeitig diagonalisiert.

   Hinweis: Zeige zuerst: Wenn $F : V \to V$ diagonalisierbar ist und $U \subset V$ ein invarianter Unterraum, so ist auch $F\restriction_U$ diagonalisierbar.

c) Schließe daraus, dass alle komplexen irreduziblen Repräsentationen einer abelschen Gruppe vom Grad 1 sind.

Wir schreiben n_G für die Anzahl der komplexen irreduziblen Repräsentationen der abelschen Gruppe G.

d) Angenommen $G = G_1 \oplus G_2$ mit G_1 und G_2 ebenfalls abelsch. Zeige, dass $n_G = n_{G_1} \cdot n_{G_2}$ gilt.

Bitte wenden!!

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 3.18 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**

Gegeben eine eine Potenz $q = p^m$ der Primzahl p, sei $G = (\mathbb{Z}_q, +)$, die zyklische Gruppe der Ordnung q. Wähle nun eine primitive q-te Einheitswurzel ω aus $\mathbb{C}$ fest und betrachte für x aus G die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\gamma}_x : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C}^\times \\ & y & \mapsto & w^{x' \cdot y} \end{array},$$

wobei x' ein beliebiger Repräsentant von x in $\mathbb{Z}$ ist.

a) Zeige, dass $\tilde{\gamma}_x$ ein wohldefiniert Gruppenmorphismus ist und folgere dies auch für die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \gamma_x : & G & \to & \mathbb{C}^\times \\ & y + q\mathbb{Z} & \mapsto & w^{x' \cdot y} \end{array}.$$

b) Begründe, dass γ_x ein irreduzibler Charakter von G ist und zeige, dass G mindestens $|G|$ viele irreduzible Charaktere besitzt.

Gegeben nun eine Abbildung $F : G \to \mathbb{C}$ setze $\begin{array}{rccl} \widehat{F} : & G & \to & \mathbb{C} \\ & y & \mapsto & \langle F, \gamma_y \rangle = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{x \in G} F(x) \cdot \overline{\gamma_y(x)} \end{array}$

c) Zeige die *Inversionformel* $F(x) = \sum_{y \in G} \widehat{F}(y) \gamma_y(x)$. Insbesondere sind die irreduziblen Charaktere von G genau die Menge $\{\gamma_x\}_{x \in G}$.

Hinweis: Wie berechnen wir das Minimalpolynom einer Einheitswurzel?

d) Schließe daraus, dass $\langle F_1, F_2 \rangle = \sum\limits_{h \in G} \widehat{F_1}(h) \overline{\widehat{F_2}(h)}$ für alle Abbildungen F_1 und F_2 von G nach $\mathbb{C}$.