Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Charlotte Bartnick — Sommersemester 2025

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 11
(letztes Blatt!)
Abgabe: 21.07.2025, 10 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

a) Bestimme alle irreduziblen Repräsentation der Quotientengruppe D_4/D_4' mit Hilfe der Aufgabe 3 auf Blatt 10.

   Hinweis: Blatt 9 Aufgabe 3 und Blatt 10 Aufgabe 2.

b) Folgere, dass D_4 bis auf Äquivalenz genau 5 irreduzible Repräsentationen besitzt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ aus $\mathbb{C}$ Einheitswurzeln und nehme an, dass das Element $0 \neq a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ ganz ist (und somit sein Minimalpolynom Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ hat). Zeige mit Hilfe der Galoistheorie, dass $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$.

Hinweis: Blatt 9 Aufgabe 4.

Aufgabe 3 (12 Punkte)**.**

Gegeben eine endliche Gruppe G identifiziere den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^G$ mit der Menge $\mathbb{C}[G]$ aller formalen Summen $\sum_{g\in G} \lambda_g \cdot g$ mit λ_g aus $\mathbb{C}$.

a) Zeige, dass $\mathbb{C}[G]$ mit der Vorschrift

$$\sum_{g\in G} \lambda_g \cdot g * \sum_{h\in G} \mu_h \cdot h = \sum_{g_1\in G} \Big(\sum_{\substack{g,h\in G\\ g\cdot h = g_1}} \lambda_g \cdot \mu_h\Big) \cdot g_1$$

   zu einem (nicht-notwendigerweise kommutativen) Ring mit 1 wird.

b) Folgere, dass die Teilmenge $Z(\mathbb{C}[G]) = \{u \in \mathbb{C}[G] \mid u * v = v * u \text{ für alle } v \in \mathbb{C}[G]\}$ ein kommutativer Unterring ist.

Gegeben eine Konjugationsklasse K von G betrachte das Element $c_K = \sum_{g\in K} 1_{\mathbb{C}} \cdot g$ aus $\mathbb{C}[G]$.

c) Zeige, dass das obige Element c_K in $Z(\mathbb{C}[G])$ liegt.

d) Seien $K_1, \ldots, K_m$ die verschiedenen Konjugationsklassen von G. Beweise, dass die Elemente $\{c_{K_i}\}_{1\leq i\leq m}$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}[G]$ linear unabhängig sind.

e) Zeige, dass sich jedes beliebige Element u von $Z(\mathbb{C}[G])$ als $\mathbb{C}$-Linearkombination der $\{c_{K_i}\}_{1\leq i\leq m}$ darstellen lässt. Insbesondere sind die $\{c_{K_i}\}_{1\leq i\leq m}$ eine Basis von $Z(\mathbb{C}[G])$.

   Hinweis: Zeige, dass für jedes Element $u = \sum_{g\in G} \lambda_g \cdot g$ aus $Z(\mathbb{C}[G])$ die Funktion $F_u : g \mapsto \lambda_g$ eine Klassenfunktion ist.

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 3.18 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.