Endliche Einfache Gruppen

Blatt 2

Abgabe: 12.05.2025, 10 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Sei G eine Gruppe, welche transitiv auf eine Menge X wirkt. Für Elemente x und y aus X setze nun

$$X(x, y) = \{g \in G \mid g * x = y\}$$

und wähle x aus X fest.

- (a) Beweise: Für g aus G ist $X(x, g * x)$ die Linksnebenklasse $g \cdot \text{Stab}_G(x)$ von $\text{Stab}_G(x)$.
- (b) Zeige, dass die Abbildung $\phi : y \mapsto X(x, y)$ eine Bijektion zwischen X und den Linksnebenklassen von $\text{Stab}_G(x)$ definiert.
- (c) Folgere, dass für alle g aus G gilt $\phi(g * x) = g \cdot \phi(x)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

Eine Untergruppe H einer Gruppe G heißt *charakteristisch*, falls H als Menge unter allen Gruppenautomorphismen von G invariant ist, d.h. falls für alle Automorphismen $\varphi : G \rightarrow G$ gilt, dass $\varphi(H) := \{\varphi(h) \mid h \in H\} = H$.

- (a) Zeige, dass jede charakteristische Untergruppe H der Gruppe G ein Normalteiler ist. Weiter beweise, dass jeder Automorphismus $\varphi : G \rightarrow G$ einen Automorphismus $\tilde{\varphi} : G/H \rightarrow G/H$ induziert.
- (b) Folgere aus (a), dass für alle $n \geq 0$ die Untergruppe $Z_n(G)$ von G charakteristisch ist.
- (c) Sei nun G endlich und S eine p -Sylow Untergruppe, welche ein Normalteiler ist. Zeige, dass S charakteristisch ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte).

Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe der Ordnung p^n , welche keine p -Sylow-Untergruppe ist. Zeige, dass p den Index von H in $N_G(H)$ teilt. Insbesondere ist die Untergruppe H nicht *selbstnormalisierend*, d.h. $H \neq N_G(H)$.

Hinweis: Beschreibe die Elemente im Fixator bezüglich der Wirkung von H auf der Menge der Nebenklassen von H gegeben durch $h * gH = (hg)H$.

Bitte wenden!!

DIE ABGABE ERFOLGT IM BRIEFKASTEN 3.18 IM KELLER DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS.
DIE BLÄTTER KÖNNEN ZU ZWEIT ABGEGEBEN WERDEN.

Aufgabe 4 (5 Punkte).

Gegeben eine endliche Gruppe G bezeichne für eine Primzahl p mit n_p die Anzahl der p -Sylow Untergruppen von G .

- (a) Angenommen $|G| = p \cdot m$, wobei m nicht durch p teilbar ist. Wie viele Elemente der Ordnung p besitzt G ?
- (b) Angenommen $|G| = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$ mit $p_1, \dots, p_k$ verschiedenen Primzahlen. Zeige, dass

$$|G| \geq 1 + \sum_{i=1}^k n_{p_i}(p_i - 1).$$

- (c) Gegeben verschiedene Primzahlen $p > q > r$, schließe aus der Teilaufgabe (b), dass eine Gruppe G der Ordnung $|G| = p \cdot q \cdot r$ nicht einfach ist.

Hinweis: Was sind die kleinstmöglichen Werte für n_p und n_q ?