

Endliche Einfache Gruppen

Blatt 3

Abgabe: 19.05.2025, 10 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte).

- (a) Zeige, dass jede endliche Gruppe der Ordnung p^n nilpotent der Klasse höchstens n ist.
- (b) Zeige, dass ein direktes Produkt $G_1 \times \cdots \times G_n$ genau dann nilpotent (der Klasse höchstens m) ist, wenn alle Faktoren $G_1, \dots, G_n$ nilpotent (der Klasse höchstens m) sind.
- (c) Folgere, dass eine Gruppe G , welche inneres Produkt ihrer Sylow-Gruppen ist, nilpotent ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte).

Betrachte die endliche Gruppe S_3 der Permutationen von 3 Elementen.

- (a) Finde eine normale Untergruppe H von S_3 derart, dass sowohl H als auch der Quotient S_3/H nilpotent sind. Schließe aus dieser Wahl, dass S_3 auflösbar ist.
- (b) Bestimme das Zentrum von S_3 und schließe daraus, dass S_3 nicht nilpotent ist.

Aufgabe 3 (9 Punkte).

Für einen Körper K der Charakteristik verschieden von 2 betrachte die Gruppe $G = \mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über K .

- (a) Bestimme das Zentrum $Z(G)$ mit Hilfe der elementaren Matrizen.

Seien nun $n = 2$ und $G = \mathrm{GL}_2(K)$ sowie $H = \left\{ A \in G \mid A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \text{ mit } x \cdot z \neq 0 \right\}$.

- b) Begründe, dass $Z(H) = Z(G)$ gilt. Schließe daraus, dass H nicht nilpotent ist.
- c) Bestimme einen Normalteiler H_1 von H mit $Z(H) \leq H_1$ derart, dass $H_1/Z(H)$ isomorph zu der Gruppe $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{y \in K}$ ist.
- d) Folgere, dass H auflösbar ist.

DIE ABGABE ERFOLGT IM BRIEFKASTEN 3.18 IM KELLER DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS.
DIE BLÄTTER KÖNNEN ZU ZWEIT ABGEGEBEN WERDEN.