Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2025

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 4
Abgabe: 26.05.2025, 10 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Betrachte Gruppen H und N derart, dass H auf N als Automorphismengruppe wirkt: Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$.

(a) Zeige, dass die Verknüpfung

$$(n, h) \otimes (n_1, h_1) = (n \cdot_N \varphi(h)(n_1), h \cdot_H h_1)$$

ein Gruppengesetz auf der Menge $N \times H$ definiert. Wir bezeichnen diese Gruppe als *semidirektes Produkt* $N \rtimes_\varphi H$.

(b) Zeige, dass $N \times \{1_H\}$ ein Normalteiler von $N \rtimes_\varphi H$ ist.

Wir nehmen nun an, dass die Gruppen H und N beide Untergruppe einer Gruppe G sind, mit N Normalteiler in G und $N \cap H = \{1_G\}$.

(c) Wenn $G = N \cdot H$, zeige, dass G isomorph zu $N \rtimes_\psi H$ ist, wobei $h \mapsto \psi(h)$ als die Konjugation auf N mit dem Element h aus H gegeben ist. In diesem Fall schreiben wir auch $G \cong N \rtimes H$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**
Betrachte eine abelsche Gruppe A sowie $C_2 = \langle c \rangle$ die zyklische Gruppe von Ordnung 2. Beachte, dass die Abbildung $\varphi : C_2 \to \mathrm{Aut}(A)$ mit $\varphi(c)(a) = a^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Setze daher $G = A \rtimes_\varphi C_2$ und identifiziere A und C_2 mit den entsprechenden Untergruppen des semidirekten Produkts (vergleiche Aufgabe 1).

(a) Zeige, dass jedes Element aus $G \setminus A$ eine *Involution*, d.h. der Ordnung 2, ist.

Ab jetzt sei $A = C_n$ die zyklische Gruppe mit $2 \leq n$ Elementen und $G_n = C_n \rtimes_\varphi C_2$, die *$n$-Diedergruppe*.

(b) Zeige, dass C_2 genau dann normal in G_n ist, wenn $n = 2$. Folgere, dass $G_2 \cong C_2 \times C_2$.

(c) Zeige, dass für $n \geq 3$ das Zentrum $Z(G_n)$ eine Untergruppe von C_n ist. Beschreibe das Zentrum von G_n explizit.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Gegeben $n \geq 2$ aus $\mathbb{N}$ gibt es einen natürlichen Gruppenmonomorphismus $\varphi : S_{n-1} \hookrightarrow S_n$. Beachte, dass $\varphi(A_{n-1}) \leq A_n$, d.h. wir können A_{n-1} als Untergruppe von A_n auffassen.

(a) Zeige, dass die Wirkung von A_n auf $\{1, \ldots, n\}$ $(n-2)$-transitiv ist, falls $n \geq 3$.

Hinweis: Vergleiche das Vorzeichen von τ und $\tau \cdot (ij)$.

(b) Zeige, dass $\mathrm{Stab}_{A_n}(n) \cong A_{n-1}$.

(c) Folgere, dass für eine Primzahl p der Stabilisator $\mathrm{Stab}_{A_p}(p)$ eine maximale Untergruppe ist. Insbesondere ist die Wirkung von A_p auf die Menge $\{1, \ldots, p\}$ primitiv, wenn $p \geq 3$.

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 3.18 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.