Endliche Einfache Gruppen
Blatt 5
Abgabe: 02.06.2025, 10 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei p eine Primzahl.

(a) Zeige, dass jede abelsche Gruppe des Exponenten p auf eine kanonische Art und Weise als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum aufgefasst werden kann.

(b) Sei nun $G = \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{n}$ mit $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeige, dass

$$|\mathrm{Aut}(G)| = (p^n - 1) \cdot (p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}).$$

Hinweis: Bestimme die Mächtigkeit eines $\mathbb{F}_p$-Vektorraumes der Dimension k.

Aufgabe 2 (7 Punkte)**.**
Sei G eine endliche Gruppe, welche transitiv und treu auf einer (nicht-leeren) Menge X wirkt.

(a) Zeige, dass die Wirkung regulär ist, falls G abelsch ist.

(b) Wir nehmen nun an, dass die Wirkung von G auf X primitiv ist. Zeige, dass entweder G isomorph zu einer zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit p prim ist oder das Zentrum $Z(G)$ die triviale Gruppe ist (und insbesondere G nicht abelsch ist).

Hinweis: Zeige mit Hilfe von Sätzen aus der Vorlesung, dass der Stabilisator eines Punktes die triviale Gruppe ist.

Aufgabe 3 (7 Punkte)**.**

(a) Sei D eine endliche Gruppe, welche von den verschiedenen Elementen x und y erzeugt wird, wobei x eine Involution ist und y so ist, dass $y^x = y^{-1}$. Zeige, dass es eine natürliche Zahl $n \geq 2$ so gibt, dass D isomorph zur n-Diedergruppe D_n ist (siehe Aufgabe 2 von Blatt 4).

(b) Zeige, dass jede Diedergruppe von zwei Involutionen erzeugt werden kann.

(c) Zeige umgekehrt, dass jede endliche Gruppe, welche von zwei Involutionen erzeugt wird, eine Diedergruppe ist.

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 3.18 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.