Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2025

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 6
Abgabe: 16.06.2025, 10 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

In der Vorlesung *Algebra und Zahlentheorie* wurde bereits gezeigt, dass die Untergruppe A_5 von S_5 normal und einfach ist.

(a) Zeige, dass S_5 keinen Normalteiler der Mächtigkeit 2 besitzt.

Hinweis: Für ein Zyklus σ der Länge r, beschreibe die Zyklendarstellung von $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$.

(b) Schließe daraus, dass der einzige echte Normalteiler von S_5 die Untergruppe A_5 ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**

Seien $p \geq 3$ eine Primzahl und $n, m \geq 1$ aus $\mathbb{N}$. Bezeichne mit $\mathbb{F}_q$ den endlichen Körper mit $q = p^m$ vielen Elementen. Zur Erinnerung: Die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_q^\times$ ist zyklisch und isomorph zu $\mathbb{Z}_{q-1}$.

(a) Bestimme mit Hilfe der Aufgabe 1 von Blatt 5 die Mächtigkeit der Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ invertierbarer Matrizen über $\mathbb{F}_q$ der Determinante 1.

Hinweis: Noether.

(b) Zeige mit Hilfe der Aufgabe 3 von Blatt 3, dass $Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)) = Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

(c) Schließe daraus, dass $Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q))$ Mächtigkeit genau $\mathrm{ggT}(n, q-1)$ hat.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

Sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p^n \cdot q$, wobei $p \neq q$ Primzahlen sind und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl ist. Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass G nicht einfach ist.

(a) Wir nehmen an, dass G einfach ist. Zeige, dass G genau q viele p-Sylowgruppen besitzt. Außerdem existieren zwei p-Sylowgruppen $P_1 \neq P_2$ mit $P_1 \cap P_2 \gneqq \{1_G\}$.

(b) Beweise, dass für jede p-Sylowgruppe P von G gilt $N_G(P) = P$, falls G einfach ist.

Ab jetzt nehmen wir an, dass eine solche Gruppe G wie oben einfach ist und betrachten einen größtmöglichen Schnitt $D = P_1 \cap P_2$ zweier verschiedener p-Sylowgruppen. Beachte, dass $|D| \geq 2$ nach Teil a).

(c) Zeige, dass $D \lneqq N_{P_1}(D)$ (und analog $D \lneqq N_{P_2}(D)$).

Hinweis: Jede p-Sylowuntergruppe ist eine p-Gruppe.

Bitte wenden!!

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 3.18 im Keller des Mathematischen Instituts.
Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.

(d) Schließe daraus, dass es ein x aus $N_G(D)$ der Ordnung q geben muss.

Hinweis: Eine p-Gruppe liegt in einer p-Sylowgruppe. Des Weiteren ist $N_{P_1}(D) = N_G(D) \cap P_1$.

(e) Zeige, dass die p-Sylowgruppen aus G gerade die Untergruppen $P_1, xP_1x^{-1}, \ldots, x^{q-1}P_1(x^{q-1})^{-1}$ sind, mit x wie im Teil (d).

(f) Zeige: Wenn eine (nicht-leere) Familie $\mathcal{F}$ von Untergruppen von G unter Konjugation invariant ist, so ist $\bigcap_{H \in \mathcal{F}} H$ ein Normalteiler. Schließe daraus, dass G nicht einfach sein kann (im Widerspruch zu unserer Annahme).