Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Charlotte Bartnick — Sommersemester 2025

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 7
Abgabe: 23.06.2025, 10 Uhr

Aufgabe 1 (7 Punkte)**.**

Gegeben $\lambda \neq 0$ aus einem Körper F und $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$, betrachte für $i \neq j$ aus $\{1, \ldots, n\}$ die $n \times n$- Matrix $A_{ij}(\lambda) = Id + \lambda E_{ij}$, wobei $E_{ij} = (\delta_{ij}(kl))_{kl}$ die Matrix ist, welche an der ij-Stelle 1 und sonst überall 0 stehen hat.

a) Zeige induktiv über n, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_n(F)$ von den Matrizen $A_{ij}(\lambda)$ erzeugt wird.

Hinweis: Führungskoeffizienten bei Gauß.

b) Zeige für $n \geq 3$, dass die Matrizen $A_{ij}(\lambda)$ in der abgeleiteten Gruppe $\mathrm{SL}_n(F)'$ liegen. Insbesondere besitzt $\mathrm{SL}_n(F)$ keinen echten Normalteiler N so, dass die Quotientengruppe abelsch ist.

Hinweis: Multiplikation mit $A_{ik}(-\lambda)A_{kj}(-1)$ induziert welche Zeilen- oder Spaltenoperationen?

Aufgabe 2 (9 Punkte)**.**

Gegeben einen Körper F und $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$, so ist die *Projektivisierung* von F^n die Menge $\mathrm{P}(F^n)$ aller Äquivalenzklassen $[\bar{a}]$ unter folgender Äquivalenzrelation auf $F^n \setminus \{\bar{0}\}$

$$\bar{a} \sim \bar{b} \text{ falls es ein } \lambda \in F^\times \text{ gibt mit } \bar{a} = \lambda \bar{b}.$$

a) Wenn q eine p-Potenz ist und $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen ist, bestimme die Mächtigkeit von $\mathrm{P}(\mathbb{F}_q^n)$.

b) Zeige, dass die Abbildung $(A, [\bar{b}]) \mapsto [\left(A \cdot (\bar{b})^t\right)^t]$ eine Wirkung von $\mathrm{GL}_n(F)$ auf $\mathrm{P}(F^n)$ definiert und bestimme den Kern des von der Gruppenwirkung induzierten Homomorphismus.

c) Zeige für $n \geq 2$, dass $\mathrm{SL}_n(F)$ auf $\mathrm{P}(F^n)$ sogar 2-transitiv wirkt.

Hinweis: Basisergänzungssatz.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Gegeben $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$ und einen Körper F, so ist die Quotientengruppe $\mathrm{SL}_n(F)/Z(\mathrm{SL_n(F)})$ die *projektive (n-)spezielle lineare Gruppe* $\mathrm{PSL}_n(F)$.

a) Bestimme die Mächtigkeit der Gruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$.

b) Zu welcher uns bekannten Gruppe ist $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$ isomorph? Insbesondere ist $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$ nicht einfach.

Hinweis: Begründe mit Hilfe von Aufgabe 2, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$ treu auf $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^2)$ wirkt. Wie viele Elemente besitzt $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^2)$?

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 3.18 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.