PROF. AMADOR MARTIN-PIZARRO
ÜBUNGEN: CHARLOTTE BARTNICK
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
SOMMERSEMESTER 2025

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 9
Abgabe: 07.07.2025, 10 Uhr

Aufgabe 1 (7 Punkte).
Sei G eine endliche Gruppe. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{C}^{|G|}$ mit Standardbasis $\{e_g \mid g \in G\}$.

a) Zeige, dass die Vorschrift $\psi(g)(e_h) = e_{g\cdot h}$ eine Darstellung $\psi : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{|G|})$ definiert.

b) Ist die Wirkung treu? Ist sie frei?

Hinweis: Symmetrie.

c) Angenommen $|G| \geq 2$. Ist dann $W = \langle e_{1_G} - e_g \mid g \neq 1_G \rangle$ ein (echter) invarianter Unterraum?

d) Bestimme den zu ψ zugehörigen Charakter $\chi_\psi : G \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte).
Wir betrachten die Diedergruppe D_4, welche wir als $D_4 = \langle a, c \rangle$ mit $a^4 = c^2 = 1$ und $a^c = a^{-1}$ auffassen können.

a) Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi : D_4 \to GL_2(\mathbb{C}), \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad c \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine treue Gruppenwirkung von D_4 auf $\mathbb{C}^2$ definiert. Ist diese Wirkung frei?

b) Zeige, dass $\mathbb{C}^2$ keine nicht-trivialen D_4-invarianten Unterräume (bezüglich Ψ) besitzt, d.h. dass die durch Ψ gegebene Darstellung irreduzibel ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Bestimme Erzeugende der abgeleiteten Gruppe D_4' sowie des Quotienten D_4/D_4'. Zu welchen Gruppen sind diese zwei Gruppen jeweils isomorph?

Aufgabe 4 (3 Punkte).
Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ komplexe Zahlen aus dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1$.

a) Zeige, dass für $\alpha_1 \neq 1$ gilt, das $|1 + \alpha_1| < 2$. Folgere, dass für $\alpha_2 \neq \alpha_1$ gilt $|\alpha_1 + \alpha_2| < 2$.

Hinweis: Trigonometrischer Pythagoras.

b) Zeige induktiv, dass $|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i| = n$ genau dann gilt, wenn $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$.

DIE ABGABE ERFOLGT IM BRIEFKASTEN 3.18 IM KELLER DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS. DIE BLÄTTER KÖNNEN ZU ZWEIT ABGEGEBEN WERDEN.