Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Endliche Einfache Gruppen

Blatt 0

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch bepunktet.

Aufgabe 1.

Zeige dass jede Bijektion f zwischen den Mengen X und Y einen Gruppenisomorphismus $F : \mathrm{Sym}(X) \to \mathrm{Sym}(Y)$ induziert.

Insbesondere liefert der Satz von Cayley eine Einbettung $G \hookrightarrow S_{|G|}$, welche bis auf Isomorphie nicht von der Aufzählung von G abhängt.

Aufgabe 2.

Gegeben eine endliche Gruppe G bezeichne für eine Primzahl p mit n_p die Anzahl der p-Sylow Untergruppen von G.

a) Angenommen $|G| = p \cdot m$, wobei m nicht durch p teilbar ist. Wie viele Elemente der Ordnung p besitzt G?

b) Angenommen $|G| = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ mit $p_1, \ldots, p_k$ verschiedenen Primzahlen. Zeige, dass

$$|G| \geq 1 + \sum_{i=1}^{k} n_{p_i}(p_i - 1)$$

c) Schließe daraus, dass eine Gruppe G der Ordnung $|G| = p \cdot q \cdot r$, wobei $p > q > r$ verschiedene Primzahlen sind, nicht einfach ist.

Hinweis: Was sind die kleinstmöglichen Werte für n_p und n_q?

Aufgabe 3.

Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von Index $(G : H) = m$. Die Gruppe G wirkt auf der Menge X der Linksnebenklassen von H in G durch Linksmultiplikation.

a) Charakterisiere den Stabilisator $\mathrm{Stab}_G(gH)$ der Nebenklasse gH.

b) Zeige, dass es eine Untergruppe N von H gibt mit $N \trianglelefteq G$ und $(G : N) \leq m!$.

Hinweis: Betrachte den Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to \mathrm{Sym}(X)$.