Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Charlotte Bartnick — Wintersemester 2023/2024

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 1
Abgabe: 30.10.2023, 12 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte).
Sei G eine Gruppe, welche transitiv auf eine Menge X wirkt.

a) Zeige, dass X und G gleichmächtig sind, falls die Wirkung regulär ist.

Für Elemente x und y aus X setze nun

$$X(x,y) = \{g \in G \mid g * x = y\}$$

und wähle x aus X fest.

b) Beweise: Für g aus G ist $X(x, g * x)$ die Linksnebenklasse $g \cdot \mathrm{Stab}_G(x)$ von $\mathrm{Stab}_G(x)$.

c) Zeige, dass die Abbildung $\phi : y \mapsto X(x,y)$ eine Bijektion zwischen X und den Linksnebenklassen von $\mathrm{Stab}_G(x)$ definiert.

d) Folgere, dass für alle g aus G gilt $\phi(g * x) = g \cdot \phi(x)$.

Aufgabe 2 (8 Punkte).
Sei G eine Gruppe mit $|G| = 2m$ und m ungerade. Betrachte die Abbildung $G \hookrightarrow \mathrm{Sym}(G)$ definiert durch $g \mapsto \lambda_g$ mit $\lambda_g(x) = g \cdot x$.

a) Sei g in G ein Element von Ordnung p, wobei p eine Primzahl ist. Zeige, dass alle Zyklen in der Darstellung von λ_g als Produkt disjunkter Zyklen der Länge p sind.

b) Nun sei u ein festes Element von Ordnung 2 aus G. (Warum existiert dieses?) Folgere, dass die Zyklendarstellung von λ_u aus eine ungeraden Anzahl von Transpositionen besteht. Insbesondere liegt λ_u nicht in der Untergruppe $A_{|G|} \leq S_{|G|}$ (siehe Blatt 0, Aufgabe 1).

c) Zeige, dass G einen Normalteiler K von Index 2 besitzt.

   Hinweis: S_n

d) Schließe daraus, dass G sich als inneres direktes Produkt $G = K \cdot < u >$ schreiben lässt.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Zeige: Eine endliche Gruppe der Ordnung p^n ist nilpotent der Klasse höchstens n.

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 2.23 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.