Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 10
Abgabe: 29.01.2024, 12 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei G eine endliche Gruppe. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{C}^{|G|}$ mit Standardbasis $\{e_g \mid g \in G\}$.

a) Zeige, dass die Vorschrift $\psi(g)(e_h) = e_{g\cdot h}$ eine Repräsentation $\psi : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{|G|})$ definiert.

b) Ist die Wirkung treu? Ist die Repräsentation irreduzibel, falls $|G| \geq 2$?

Hinweis: Symmetrie.

c) Angenommen $|G| \geq 2$. Ist dann $W = \langle e_1 - e_g \mid g \neq 1\rangle$ ein invarianter Unterraum?

Aufgabe 2 (11 Punkte)**.**
Betrachte eine endliche, abelsche Gruppe G der Ordnung n, sowie $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Repräsentation, wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum sei. Wir fassen die Elemente von $\mathrm{GL}(V)$ als Matrizen auf (nach geeigneter Wahl einer Basis).

a) Zeige, dass die Matrizen $\{\varphi(g)\}_{g\in G}$ miteinander kommutieren.

b) Beweise, dass die Matrizen $\varphi(g)$ für g aus G alle diagonalisierbar sind.

Hinweis: Diagonalisierbarkeitskriterium nach dem Minimalpolynom.

c) Seien $A_1, \dots A_n$ beliebige invertierbare $m \times m$ Matrizen über einem Körper K, welche diagonalisierbar sind und miteinander kommutieren. Zeige induktiv über n, dass es eine Basis von K^m gibt, welche alle A_i gleichzeitig diagonalisiert.

Hinweis: Zeige zuerst: Wenn $F : V \to V$ diagonalisierbar ist und $U \subset V$ ein invarianter Unterraum, so ist auch $F_{\restriction U}$ diagonalisierbar.

d) Schließe daraus, dass alle komplexen irreduziblen Repräsentationen einer abelschen Gruppe vom Grad (d.h. $\dim_{\mathbb{C}}(V)$) 1 sind.

Wir schreiben n_G für die Anzahl der irreduziblen Repräsentationen der abelschen Gruppe G.

e) Angenommen $G = G_1 \oplus G_2$ mit G_1 und G_2 ebenfalls abelsch. Zeige, dass $n_G = n_{G_1} \cdot n_{G_2}$ gilt.

(Bitte wenden!)

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 2.23 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**

Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ komplexe Zahlen aus dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1$.

a) Zeige, dass für $\alpha_1 \neq 1$ gilt, das $|1 + \alpha_1| < 2$. Folgere, dass für $\alpha_2 \neq \alpha_1$ gilt $|\alpha_1 + \alpha_2| < 2$.

   Hinweis: Trigonometrischer Pythagoras.

b) Zeige induktiv, dass $|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i| = n$ genau dann gilt, wenn $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$.