Endliche Einfache Gruppen
Blatt 11 (**Letzes Blatt!**)
Abgabe: 05.02.2024, 12 Uhr

Aufgabe 1 (7 Punkte)**.**

Gegeben eine eine Potenz $q = p^m$ der Primzahl p, sei $G = (\mathbb{Z}_q, +)$, die zyklische Gruppe der Ordnung q. Wähle nun eine primitive q-te Einheitswurzel ω aus $\mathbb{C}$ fest und betrachte für x aus G die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\gamma}_x : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C}^\times \\ & y & \mapsto & w^{x' \cdot y} \end{array} ,$$

wobei x' ein beliebiger Repräsentant von x in $\mathbb{Z}$ ist.

a) Zeige, dass $\tilde{\gamma}_x$ ein wohldefiniert Gruppenmorphismus ist und folgere dies auch für die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \gamma_x : & G & \to & \mathbb{C}^\times \\ & y + q\mathbb{Z} & \mapsto & w^{x' \cdot y} \end{array} .$$

b) Begründe, dass γ_x ein irreduzibler Charakter von G ist und zeige, dass G mindestens $|G|$ viele irreduzible Charaktere besitzt.

Gegeben nun eine Abbildung $F : G \to \mathbb{C}$ setze $\begin{array}{rccc} \widehat{F} : & G & \to & \mathbb{C} \\ & y & \mapsto & \langle F, \gamma_y \rangle = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{x \in G} F(x) \cdot \overline{\gamma_y(x)} \end{array}$

c) Zeige die *Inversionformel* $F(x) = \sum_{y \in G} \widehat{F}(y)\gamma_y(x)$. Insbesondere sind die irreduziblen Charaktere von G genau die Menge $\{\gamma_x\}_{x \in G}$.

   Hinweis: Wie berechnen wir das Minimalpolynom einer Einheitswurzel?

d) Schließe daraus, dass $\langle F_1, F_2 \rangle = \sum\limits_{h \in G} \widehat{F_1}(h)\overline{\widehat{F_2}(h)}$ für alle Abbildungen F_1 und F_2 von G nach $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (1+2+2 Punkte)**.**

Sei G eine endliche Gruppe derart, dass $|G|$ keine Primzahl ist. Weiter seien $\chi_1, \ldots, \chi_n$ alle nichttrivialen irreduziblen Charaktere der Gruppe, wobei χ_i assoziiert zu der irreduziblen Repräsentation $\varphi_i : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{m_i})$ von Grad m_i sei.

a) Was ist der entsprechende Grad des irreduziblen trivialen Charakters?

Wir nehmen nun an, dass G einfach ist.

b) Zeige, dass für $1 \leq i \leq n$ die Menge $H_i = \{g \in G \mid \varphi_i(g) = \lambda_g \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{m_i}}$ für ein λ_g aus $\mathbb{C}\}$ ein echter abelscher Normalteiler von G ist.

   Hinweis: Zeige zuerst, dass φ_i injektiv ist.

c) Schließe daraus mit Aufgabe 3 von Blatt 10, dass $|\chi_i(g)| < m_i$ für alle $g \neq 1_G$ und $1 \leq i \leq n$.

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 2.23 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)**.**

a) Zeige mit Hilfe des noetherschen Isomorphiesatzes, dass jede komplexe Repräsentation von Grad 1 einer endlichen Gruppe G eindeutig von einer irreduziblen Repräsentation der Quotientengruppe G/G' bestimmt ist.

b) Bestimme alle irreduziblen Repräsentation der Quotientengruppe D_4/D_4' mit Hilfe der Aufgabe 1 auf diesem Blatt.

   Hinweis: Blatt 9 Aufgabe 3 und Blatt 10 Aufgabe 2 e).

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.**

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ aus $\mathbb{C}$ Einheitswurzeln und nehme an, dass das Element $0 \neq a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist und alle Koeffizienten seines Minimalpolynoms in $\mathbb{Z}$ liegen. Zeige, dass $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$.

Hinweis: Blatt 10 Aufgabe 3; wie sehen die Bilder von a unter Elementen von $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ aus?