Endliche Einfache Gruppen

Blatt 2

Abgabe: 06.11.2023, 12 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

Zeige, dass ein direktes Produkt $G_1 \times \cdots \times G_n$ genau dann nilpotent (der Klasse höchstens m) ist, wenn alle Faktoren $G_1, \ldots, G_n$ nilpotent (der Klasse höchstens m) sind.

Aufgabe 2 (7 Punkte)**.**

Sei G eine beliebige Gruppe sowie H eine Untergruppe des Zentrums $Z(G)$. Beachte, dass H ein Normalteiler von G und nilpotent ist.

a) Zeige, dass die Gruppe G nilpotent (der Klasse höchstens $m+1$) ist, falls die Quotientengruppe G/H nilpotent der Klasse m ist.

Betrachte die endliche Gruppe $G = S_3$ der Permutationen von 3 Elementen.

b) Finde eine normale Untergruppe H von G derart, dass sowohl H als auch der Quotient G/H nilpotent sind. Schließe aus dieser Wahl, dass S_3 auflösbar ist.

c) Bestimme das Zentrum von G und schließe daraus, dass G nicht nilpotent ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**

Für einen Körper K der Charakteristik verschieden von 2 betrachte die Gruppe $G = \mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über K.

a) Bestimme das Zentrum $Z(G)$ mit Hilfe der elementaren Matrizen.

Seien nun $n = 2$ und $G = \mathrm{GL}_2(K)$ sowie $H = \{A \in G \mid A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \text{ mit } x \cdot z \neq 0\}$.

b) Begründe, dass $Z(H) = Z(G)$ gilt. Schließe daraus, dass H nicht nilpotent ist.

c) Bestimme einen Normalteiler H_1 von H mit $Z(H) \leq H_1$ derart, dass $H_1/Z(H)$ isomorph zu der Gruppe $\{\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}_{y \in K}$ ist.

d) Folgere, dass H auflösbar ist.

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 2.23 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.