Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Charlotte Bartnick — Wintersemester 2023/2024

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 3
Abgabe: **16.11.2023!!, 12 Uhr**

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**
Sei G eine abelsche Gruppe:

a) Gegeben eine natürliche Zahl m aus $\mathbb{N}$, zeige, dass die Abbildung $G \to G$ mit $g \mapsto g^m$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

b) Betrachte nun Elemente

g und h aus G mit $\mathrm{ord}(g)$ und $\mathrm{ord}(h)$ teilerfremd. Zeige, dass G ein Element der Ordnung $\mathrm{ord}(g) \cdot \mathrm{ord}(h)$ besitzt.

c) Schließe daraus, dass die Familie der Untergruppen $\mathrm{Tor}_p(G)$, mit p eine Primzahl, transversal ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Betrachte Gruppen H und N derart, dass H auf N als Automorphismengruppe wirkt: Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$.

a) Zeige, dass die Verknüpfung

$$(n, h) \otimes (n_1, h_1) = (n \cdot_N \varphi(h)(n_1), h \cdot_H h_1)$$

ein Gruppengesetz auf der Menge $N \times H$ definiert. Wir bezeichnen diese Gruppe als $N \rtimes_\varphi H$.

b) Zeige, dass $N \times \{1_H\}$ ein Normalteiler von $N \rtimes_\varphi H$ ist.

Wir nehmen nun an, dass die Gruppen H und N beide Untergruppe einer Gruppe G sind, mit N Normalteiler in G und $N \cap H = \{1_G\}$.

c) Wenn $G = N \cdot H$, zeige, dass G isomorph zu $N \rtimes_\psi H$ ist, wobei $h \mapsto \psi(h)$ als die Konjugation auf N mit dem Element h aus H gegeben ist. In diesem Fall schreiben wir auch $G \cong N \rtimes H$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**

a) Bestimme bis auf Isomorphie alle endliche abelsche Gruppen mit 4 Elementen, ohne die Charakterisierung abelscher endlichen Gruppen zu verwenden.

b) Bestimme nun bis auf Isomorphie alle endliche abelsche Gruppen der Mächtigkeit 8, ohne die Charakterisierung abelscher endlichen Gruppen zu verwenden.

Hinweis: Wenn G eine Untergruppe H mit 4 Elementen hat, begründe, dass jedes Element g^2, mit g aus G, in H liegt. Welche Werte kann $\mathrm{ord}(g^2)$ annehmen?

Bitte wenden!!

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 2.23 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

Betrachte die Gruppe $G = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_r}$ m_i ein Faktor von m_{i-1} für $2 \leq i \leq r$. Wir benutzen die additive Notation für das Gruppengesetzt.

a) Bestimme den Exponenten von G.

b) Für $2 \leq j \leq r$ definiere nun die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \psi_j : & G & \to & G \\ & g & \mapsto & m_j \cdot g \end{array}$$

Zeige, dass das Bild $\mathrm{Im}(\psi_j)$ die Größe $\frac{m_1 \cdots m_{j-1}}{m_j^{j-1}}$ besitzt.