Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 4
Abgabe: 27.11.2023, 12 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

a) Bestimme alle abelschen Gruppen der Mächtigkeit 196.

b) Bestimme alle abelschen Gruppen der Mächtigkeit $3969 = 7^2 \cdot 3^4$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**

Betrachte eine abelsche Gruppe A sowie $C_2 = \langle c \rangle$ die zyklische Gruppe von Ordnung 2. Beachte, dass die Abbildung $\varphi : C_2 \to \mathrm{Aut}(A)$ mit $\varphi(c)(a) = a^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Setze daher $G = A \rtimes_\varphi C_2$ und identifiziere A und C_2 mit den entsprechenden Untergruppen des semidirekten Produkts (vergleiche Aufgabe 2 auf Blatt 3).

a) Zeige, dass jedes Element aus $G \setminus A$ eine *Involution*, d.h. der Ordnung 2, ist.

Ab jetzt sei $A = C_n$ die zyklische Gruppe mit n Elementen und $G_n = C_n \rtimes_\varphi C_2$, die *n-Diedergruppe*.

b) Zeige, dass C_2 genau dann normal in G_n ist, wenn $n = 2$. Folgere, dass $G_2 \cong C_2 \times C_2$.

c) Zeige, dass für $n \geq 3$ das Zentrum $Z(G_n)$ eine Untergruppe von C_n ist. Beschreibe das Zentrum von G_n explizit.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**

Sei p eine Primzahl.

a) Zeige, dass jede abelsche Gruppe des Exponenten p auf eine kanonische Art und Weise als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum aufgefasst werden kann.

b) Sei nun $G = \underbrace{C_p \times \cdots \times C_p}_{n}$. Zeige, dass $|\mathrm{Aut}(G)| = (p^n - 1) \cdot (p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$.

Hinweis: Bestimme die Mächtigkeit eines $\mathbb{F}_p$-Vektorraumes der Dimension k.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.**

Zeige, dass für $n \geq 3$ die Gruppe A_n transitiv auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ wirkt.

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 2.23 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.