Endliche Einfache Gruppen
Blatt 5
Abgabe: 04.12.2023, 12 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**
Gegeben $n \geq 2$ aus $\mathbb{N}$ gibt es einen natürlichen Gruppenmonomorphismus $\varphi : S_{n-1} \hookrightarrow S_n$.

a) Zeige, dass $\varphi(A_{n-1}) \leq A_n$, d.h. wir können A_{n-1} als Untergruppe von A_n auffassen.

b) Zeige, dass $\mathrm{Stab}_{A_n}(n) \cong A_{n-1}$.

c) Folgere, dass für eine Primzahl p der Stabilisator $\mathrm{Stab}_{A_p}(p)$ eine maximale Untergruppe ist. Insbesondere ist die Wirkung von A_p auf die Menge $\{1, \ldots, p\}$ primitiv, wenn $p \geq 3$ (Siehe Aufgabe 4 von Blatt 4).

d) Zeige, dass die Wirkung von A_n auf $\{1, \ldots, n\}$ sogar $(n-2)$-transitiv ist, falls $n \geq 3$.

Hinweis: Vergleiche das Vorzeichen von τ und $\tau \cdot (ij)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**
Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt und $H \leq G$ eine Untergruppe. Für x_0 aus X setze $B = \{h * x_0\}_{h \in H}$.

a) Zeige, dass $H * B = B$.

b) Nehme nun zusätzlich an, dass die Wirkung transitiv ist und $H \trianglelefteq G$ ein Normalteiler ist. Zeige, dass B ein Block ist.

Hinweis: Zeige für g aus G beliebig, dass $g * x_0$ in B liegt.

Aufgabe 3 (7 Punkte)**.** Seien $p \geq 3$ eine Primzahl und $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$. Bezeichne mit $\mathbb{F}_q$ den endlichen Körper mit $q = p^n$ vielen Elementen. Als Erinnerung, die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_q$ ist zyklisch und isomorph zu $\mathbb{Z}_{q-1}$.

a) Bestimme mit Hilfe der Aufgabe 3 im Blatt 4 die Mächtigkeit der Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ invertierbarer Matrizen über $\mathbb{F}_q$ der Determinante 1.

Hinweis: Noether.

b) Zeige mit Hilfe der Aufgabe 3 im Blatt 2, dass $Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)) = Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

c) Schließe daraus, dass $Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q))$ Mächtigkeit genau $\mathrm{ggT}(n, q-1)$ hat.

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 2.23 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.