Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 6
Abgabe: 11.12.2023, 12 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.**
Zeige, dass für $n \geq 3$ die Gruppe S_n keinen Normalteiler der Mächtigkeit 2 besitzt.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.**
Wir betrachten eine transitive Gruppenwirkung von G auf der (nicht-leeren) Menge X und für ein Element x von X die Gruppe $H = \mathrm{Stab}_G(x)$. In Aufgabe 1 von Blatt 1 hatten wir gesehen, dass es eine Bijektion ϕ zwischen X und der Menge Ω der linken Nebenklassen von H in G so gibt, dass die Gruppenwirkungen von G auf X und von G auf Ω durch ϕ isomorph sind.

Sei nun $N \trianglelefteq G$. Zeige, dass G genau dann die Gruppe $N \cdot H$ ist, wenn N selbst auf X transitiv wirkt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**
Sei V ein n-dimensionaler Vektoraum über einem Körper F. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $V \setminus \{0\}$ durch die Vorschrift

$$v \equiv w \text{ falls es ein } \lambda \in F^\times \text{ gibt mit } v = \lambda w.$$

Für ein Element v aus $V \setminus \{0\}$ schreiben wir $[v]$ für seine Äquivalenzklasse unter dieser Relationen und nennen die Menge aller Äquivalenzklassen $\mathrm{P}(V)$, die *Projektivisierung* von V.

a) Für $F = \mathbb{F}_q$, was ist die Mächtigkeit von $\mathrm{P}(V)$?

b) Zeige, dass die Abbildung $(g, [v]) \mapsto [g(v)]$ eine Wirkung von $\mathrm{GL}(V)$ auf $\mathrm{P}(V)$ definiert.

c) Bestimme den Kern des von der Gruppenwirkung induzierten Homomorphismus.

d) Wir nehmen an, dass $\dim_F(V) \geq 2$. Zeige, dass $\mathrm{SL}(V)$ 2-transitiv auf $\mathrm{P}(V)$ wirkt.

(Bitte wenden!)

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 2.23 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und F ein Körper. Gegeben $\lambda \neq 0$ aus F und $i \neq j$ aus $\{1, \ldots, n\}$ betrachte die $n \times n$- Matrix $A_{ij}(\lambda) = Id + \lambda E_{ij}$, wobei $E_{ij} = (\delta_{ij}(kl))_{kl}$ die Matrix ist, welche an der ij-Stelle 1 und sonst überall 0 stehen hat.

a) Zeige induktiv über n, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_n(F)$ von den Matrizen $A_{ij}(\lambda)$ erzeugt wird.

   Hinweis: Führungskoeffizienten bei Gauß.

b) Zeige für $n \geq 3$, dass die Matrizen $A_{ij}(\lambda)$ in der abgeleiteten Gruppe $\mathrm{SL}_n(F)'$ liegen. Insbesondere gibt es keinen echten Normalteiler N von $\mathrm{SL}_n(F)$ so, dass die Quotientengruppe abelsch ist.

   Hinweis: Welche Zeilenoperationen ergeben sich durch Linksmultiplikation mit $A_{ik}(-\lambda)A_{kj}(-1)$?