Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 7
Abgabe: 18.12.2023, 12 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

a) Sei D eine endliche Gruppe, welche von den verschiedenen Elementen x und y erzeugt wird, wobei x eine Involution ist und y so ist, dass $y^x = y^{-1}$. Zeige, dass es eine natürliche Zahl $n \geq 2$ so gibt, dass D isomorph zur n-Diedergruppe D_n ist (siehe Aufgabe 2 von Blatt 4).

b) Zeige, dass jede Diedergruppe von zwei Involutionen erzeugt werden kann.

c) Zeige umgekehrt, dass jede endliche Gruppe, welche von zwei Involutionen erzeugt wird, eine Diedergruppe ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

Der *erweiterte Zentralisator* des Elements x einer Gruppe G ist die Menge

$$C^*_G(x) = \{g \in G \mid x^g \in \{x, x^{-1}\}\}$$

a) Zeige dass $C^*_G(x)$ eine Untergruppe von G ist mit $C_G(x) \leq C^*_G(x)$.

b) Wie groß kann der Index des Zentralisator $C_G(x)$ im erweiterten Zentralisator $C^*_G(x)$ sein?

Hinweis: Betrachte die Menge der g aus $C^*_G(x)$ mit $x^g = x^{-1}$.

c) Zeige: Des Weiteren ist $C^*_G(x)$ genau dann gleich $C_G(x)$, wenn x eine Involution ist oder wenn x und x^{-1} nicht konjugiert sind.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**

a) Zeige, dass die Gruppe A_4 keinen Normalteiler der Mächtigkeit 6 besitzt.

Hinweis: Sylow-Sätze

b) Zu welcher uns bekannten Gruppe ist $\mathrm{PSL}(2, 2)$ isomorph? Insbesondere ist $\mathrm{PSL}(2, 2)$ nicht einfach.

Hinweis: $\mathrm{PSL}(2, 2)$ wirkt treu auf $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^2)$. Wie viele Elemente besitzt $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^2)$?

c) Zeige nun, dass $\mathrm{PSL}(2, 3)$ auch nicht einfach ist.

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 2.23 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.