Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Charlotte Bartnick — Wintersemester 2023/2024

Endliche Einfache Gruppen

Blatt 8

Abgabe: 15.01.2024, 12 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Ein Element x einer Gruppe heißt *stark reell*, falls es eine Involution u mit $x^u = x^{-1}$ gibt.

a) Zeige, dass jede Involution stark reell ist.

b) Sei $x \neq 1$ ein Element der Gruppe G derart, dass x und x^{-1} konjugiert sind. Zeige, dass x stark reell ist, falls $|C_G(x)|$ ungerade ist.

c) Zeige dass jedes Element von D_n für $n \geq 2$ stark reell ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte).

Sei G eine endliche Gruppe mit mindestens zwei 2-Sylowgruppen derart, dass der Schnitt zweier verschiedener 2-Sylowgruppen trivial ist. Betrachte zwei 2-Sylowgruppen S und T und Elemente s aus S sowie t aus T von Ordnung 2. Zeige, dass $S = T$, falls s und t nicht konjugiert sind.

Hinweis: Für eine passende Involution u betrachte die Untergruppe $\langle s, u\rangle$.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

In der symmetrischen Gruppe S_n mit $n \geq 3$ sei σ ein k-Zykel für ein $2 \leq k \leq n$.

a) Zeige, dass $C_{S_n}(\sigma) = \langle\langle\sigma\rangle \cup \{\tau \in S_n \mid \tau \text{ besteht aus zu } \sigma \text{ disjunkten Zykeln }\}\rangle$.

Hinweis: Zykeldarstellung von $\tau\sigma\tau^{-1}$

b) Folgere, dass $C_{S_n}(\sigma) \cong C_k \otimes S_{n-k}$. Insbesondere ist $|C_{S_n}(\sigma)| = k \cdot (n-k)!$.

Aufgabe 4 (5 Punkte).

Für $n \geq 3$ ungerade betrachte einen n-Zyklus σ in der symmetrischen Gruppe $G = S_n$.

a) Zeige, dass σ stark reell ist. Folgere, dass eine Involution τ existiert mit $\tau\sigma$ ebenfalls Involution.

b) Zeige mit Hilfe der Aufgabe 3 auf diesem Blatt, dass $C_G(\tau) \cap C_G(\tau\sigma)$ trivial ist.

Hinweis: In jeder Gruppe G gilt $C_G(g) \cap C_G(gh) \subset C_G(h)$.

c) Folgere, dass τ und $\tau\sigma$ konjugiert sein müssen.

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 2.23 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.