Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Endliche Einfache Gruppen
Blatt 9
Abgabe: 22.01.2024, 12 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

Sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p^n \cdot q$, wobei $p \neq q$ Primzahlen sind und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl ist. Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass G nicht einfach ist.

a) Wir nehmen an, dass G einfach ist. Zeige, dass G genau q viele p-Sylowgruppen besitzt. Außerdem existieren zwei p-Sylowgruppen $P_1 \neq P_2$ mit $P_1 \cap P_2 \gneq \{1_G\}$.

b) Beweise, dass für jede p-Sylowgruppe P von G gilt $N_G(P) = P$, falls G einfach ist.

Ab jetzt nehmen wir an, dass eine solche Gruppe G wie oben einfach ist und betrachten einen größtmöglichen Schnitt $D = P_1 \cap P_2$ zweier verschiedener p-Sylowgruppen. Beachte, dass $|D| \geq 2$ nach Teil a).

c) Zeige, dass $D \lneq N_{P_1}(D)$ (und analog $D \lneq N_{P_2}(D)$).

   Hinweis: Der Index.

d) Schließe daraus, dass es ein x aus $N_G(D)$ der Ordnung q geben muss.

   Hinweis: Eine p-Gruppe liegt in einer p-Sylowgruppe. Des Weiteren ist $N_{P_1}(D) = N_G(D) \cap P_1$

e) Zeige, dass die p-Sylowgruppen aus G gerade die Untergruppen $P_1, xP_1x^{-1}, \ldots, x^{q-1}P_1(x^{q-1})^{-1}$ sind, mit x wie im Teil d). Folgere, dass G nicht einfach sein kann (im Widerspruch zu unserer Annahme).

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)**.**

Wir betrachten die Diedergruppe D_4, welche wir als $D_4 = \langle a, c \rangle$ mit $a^4 = c^2 = 1$ und $a^c = a^{-1}$ auffassen können.

a) Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi : D_4 \to GL_2(\mathbb{C}), \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad c \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   eine treue Gruppenwirkung von D_4 auf $\mathbb{C}^2$ definiert. Ist diese Wirkung frei?

b) Ein Unterraum $V \subset \mathbb{C}^2$ ist D_4-invariant (bezüglich Ψ), falls $\Psi(g)(v)$ in V für alle v aus V und g aus D_4 liegt. Zeige, dass $\mathbb{C}^2$ keine nicht-trivialen D_4-invarianten Unterräume besitzt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**

Bestimme Erzeugende der abgeleiteten Gruppe D_4' sowie des Quotienten D_4/D_4'. Zu welchen Gruppen sind diese zwei Gruppen jeweils isomorph?

Die Abgabe erfolgt im Briefkasten 2.23 im Keller des Mathematischen Instituts. Die Blätter können zu zweit abgegeben werden.