

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 1

Abgabe: 30.10.2023, 14 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Gib (ohne Wahrheitstabellen zu benutzen) aussagenlogische Formeln sowohl in KNF als auch in DNF an, welche logisch äquivalent zu den folgenden aussagenlogischen Formeln sind.

- a) $((A_1 \wedge A_2) \rightarrow (A_3 \rightarrow A_2))$
b) $((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow \neg(A_1 \rightarrow A_3))$

Aufgabe 2 (3 Punkte).

Sind die aussagenlogischen Formeln $\neg(P \rightarrow (Q \vee R))$ und $(\neg P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ logisch äquivalent? (Ohne Wahrheitstabellen zu benutzen!)

Aufgabe 3 (5 Punkte).

Entscheide mit Hilfe der Tableau Methode, ob folgende aussagenlogische Formeln Tautologien sind.

- a) $(\neg(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (A_2 \vee A_1))$
b) $((((A_1 \rightarrow A_3) \rightarrow (A_3 \rightarrow A_2)) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2))$
c) $((((A_1 \wedge A_2) \rightarrow (A_3 \vee A_4)) \rightarrow ((A_1 \vee A_2) \rightarrow (A_3 \wedge A_4)))$

Aufgabe 4 (6 Punkte).

Gegeben eine feste Kollektion aussagenlogischer Formeln $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ betrachte für eine beliebige aussagenlogische Formel $P(A_1, \dots, A_n)$ die Formel $P(Q_1, \dots, Q_n)$, welche aus P entsteht indem jedes Vorkommen der Aussagenvariable A_i durch die Formel Q_i ersetzt wird (für $i = 1, \dots, n$).

Beispielsweise erhält man so für $Q_1 = (A_1 \wedge A_2)$ und $Q_2 = A_4$ aus der aussagenlogischen Formel $P = (A_1 \vee A_2)$ die neue Formel $P(Q_1, Q_2) = (Q_1 \vee Q_2) = ((A_1 \wedge A_2) \vee A_4)$ (und nicht $((A_1 \wedge A_4) \vee A_4)$!).

- a) Zeige induktiv über den Aufbau der Formeln, dass für jede aussagenlogische Formel $P(A_1, \dots, A_n)$ die Formel $P(Q_1, \dots, Q_n)$ wieder eine aussagenlogische Formel ist.

Nun betrachte für eine Belegung $\beta : \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}$ die neue Belegung $\beta^* : \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}$ definiert durch $\beta^*(A_i) = \beta(Q_i)$.

- b) Zeige induktiv, dass für jede aussagenlogische Formel P gilt $\beta^*(P(A_1, \dots, A_n)) = \beta(P(Q_1, \dots, Q_n))$.
Schließe daraus, dass $P(Q_1, \dots, Q_n)$ eine Tautologie ist, falls $P(A_1, \dots, A_n)$ eine Tautologie ist.