Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 10

Abgabe: 22.01.2024, 14 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive streng monoton steigende Funktion. Zeige, dass die Teilmenge $f(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ rekursiv ist.

b) Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive Funktion mit unendlichem Bildbereich. Zeige, dass es eine rekursive streng monoton steigende Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart gibt, dass $h(\mathbb{N}) \subset g(\mathbb{N})$.

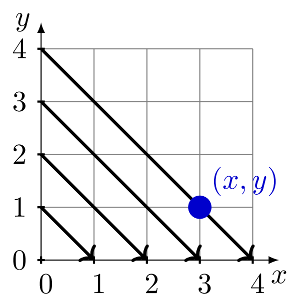
c) Schließe daraus, dass jede unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge A von $\mathbb{N}$ eine rekursive unendliche Teilmenge $B \subset A$ besitzt.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.**

Seien A und B rekursiv aufzählbare Teilmengen von $\mathbb{N}^k$ derart, dass $A \cap B$ und $A \cup B$ rekursiv sind. Zeige, dass A und B beide rekursiv ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)**.**

In dieser Aufgabe zeigen wir zuerst, dass die Abbildung $\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & x + \binom{x+y+1}{2} \end{array}$ eine bijektive primitiv rekursive Aufzählung von $\mathbb{N}^2$ bestimmt:



Das Element $(0,0)$, mit Wert $0 = \alpha(0,0)$ wird *das kleinste Element (bezüglich der von α induzierten Aufzählung)* sein. Sein *Nachfolger* ist $(0,1)$ mit Wert $1 = \alpha(0,1)$. Auf jeder Diagonale ist der *Nachfolger* von $(x, y+1)$ der Punkt $(x+1, y)$. Der *Nachfolger* von $(x,0)$ ist der Punkt $(0, x+1)$.

a) Schließe aus der Identität

$$1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2},$$

dass die Funktion α injektiv ist.

(Bitte wenden!)

Die Übungsblätter sollen zu zweit eingereicht werden. Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt in den Briefkästen in der Georges-Köhler-Allee 51.

HINWEIS: Auf der Gerade im Diagramm, welche den Punkt (x, y) enthält, gibt es genau x viele Vorgänger von (x, y). Wie viele Punkte gibt es auf den vorigen Geraden? Was ist der Zusammenhang mit $\alpha(x, y)$?

b) Zeige induktiv, dass jedes n aus $\mathbb{N}$ im Bildbereich von α liegt. Schließe daraus, dass α eine Bijektion ist. Begründe, dass $\alpha_3 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $\alpha_3(x, y, z) = \alpha(\alpha(x, y), z)$ auch eine Bijektion ist.

c) Zeige, dass α primitiv rekursiv ist.

d) Zeige, dass die Funktionen $\beta_1 = \pi_1^2 \circ \alpha^{-1}$ und $\beta_2 = \pi_2^2 \circ \alpha^{-1}$ (mit der Notation der Definition 3.1 im Skript) primitiv rekursiv sind. Insbesondere ist $\alpha^{-1} = (\beta_1, \beta_2)$ auch primitiv rekursiv.

   HINWEIS: $\alpha(x, y) \geq \max\{x, y\}$.

Sei nun die Fibonacci Folge:

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für } n \geq 2.$$

(e) Zeige mit Hilfe der Funktionen β_1 und β_2, dass die Funktion $h(n) = \alpha(a_n, a_{n+1})$ primitiv rekursiv ist.

   Insbesondere ist die Funktion $n \mapsto a_n = \beta_1(h(n))$ auch primitiv rekursiv.