Prof. Amador Martin-Pizarro | Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Charlotte Bartnick | Wintersemester 2023/2024

Logik für Studierende der Informatik
Blatt 11
Abgabe: 29.01.2024, 14 Uhr

Aufgabe 1 (2+2+1+2 Punkte)**.**

Die Bellschen Zahlen B_n geben die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge an. Eine Partition einer Menge ist eine Aufteilung in disjunkte nicht-leere Teilmengen. Beispielsweise gilt $B_3 = 5$, da sich eine 3-elementige Menge $\{1,2,3\}$ auf 5 verschiedene Arten zerlegen lässt (nämlich in die Einermengen $\{1\},\{2\},\{3\}$ oder in die Menge $\{1,2,3\}$ oder auf drei verschieden Arten in eine ein- und eine zweielementige Menge). Zur einheitlichen Berechnung setzt man $B_0 = 1$.

a) Beweise die folgende Formel zur Berechnung der Bellschen Zahlen: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

   Hinweis: Wenn man einen Punkt fixiert, auf welche Arten kann er in der Partition vorkommen?

b) Zeige, dass die Funktion
$$\begin{aligned}\operatorname{div}: \quad \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N}\\ (m,n) &\mapsto \begin{cases}\frac{m}{n}, & \text{falls } n|m\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$
   primitiv rekursiv ist.

c) Schließe daraus, dass die Funktion $(n,k) \mapsto \binom{n}{k}$ primitiv rekursiv ist.

d) Folgere, dass die Funktion $n \mapsto B_n$ primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 2 (2+2+4 Punkte)**.**

a) Seien $g(\bar{x}, z)$ und $f(\bar{x})$ (primitiv) rekursive Funktionen. Zeige, dass die Funktion $\bar{x} \mapsto \prod_{i<f(\bar{x})} g(\bar{x}, i)$ ebenfalls (primitiv) rekursiv ist.

   Hinweis: Aufgabe 3 auf Blatt 7

b) Zeige, dass die Funktion
$$(k,n) \mapsto \begin{cases}\langle s_1\rangle, & \text{falls } n = \langle s_1 \frown s_2\rangle \text{ mit } k = \lg(s_1)\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$
   primitiv rekursiv ist, wobei $s_1 \frown s_2$ die Konkatenation der Folgen s_1 und s_2 ist.

c) Schließe aus a), dass die Funktion
$$\begin{aligned}F: \quad \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N}\\ (m,n) &\mapsto \begin{cases}\ulcorner(\varphi \to \psi)\urcorner, & \text{falls } m = \ulcorner\varphi\urcorner \text{ und } n = \ulcorner\psi\urcorner, \text{ mit } \varphi \text{ und } \psi\ \mathcal{L}\text{-Formeln}\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}$$
   primitiv rekursiv ist, wobei $\ulcorner\varphi\urcorner$ die Gödelnummer der Formel φ in der endlichen Sprache $\mathcal{L}$ nach geeigneter Gödelisierung ist.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**

Wir nehmen an, dass die endliche Sprache $\mathcal{L}$ eine Gödelisierung besitzt. Insbesondere besitzt jeder $\mathcal{L}$-Term, bzw. jede $\mathcal{L}$-Formel, eine Gödelnummer.

Zeige, dass die Funktion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^3 & \to & \mathbb{N} \\ (m,n,k) & \mapsto & \begin{cases} \ulcorner t_{s/x_1} \urcorner, & \text{falls } m = \ulcorner s \urcorner \text{ und } k = \ulcorner t \urcorner \text{, mit } s \text{ und } t \text{ } \mathcal{L}\text{-Terme, sowie } n = \ulcorner x_1 \urcorner \text{, wobei } t_{s/x_1} \text{ durch Ersetzen der Variable } x_1 \text{ durch } s \text{ aus dem Term } t \text{ entsteht.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{array}$$

primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Der Beweis von Lemma 3.28.