Logik für Studierende der Informatik
Blatt 12 (**Letzes Blatt!**)
Abgabe: 05.02.2024, 14 Uhr

Aufgabe 1 (2+1+2,5+3+2,5+2 Punkte).

In der Sprache $\mathcal{L} = \{f, g, <\}$ mit den einstelligen Funktionszeichen f und g sowie dem zweistelligen Relationszeichen $<$ betrachten wir die folgende Klasse $\mathcal{K}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$: Die Relation $<^{\mathcal{M}}$ ist eine diskrete lineare Ordnung ohne Endpunkte (d.h. transitiv, irreflexiv, total, jedes Element besitzt einen direkten Nachfolger und es gibt weder ein größtes noch ein kleinstes Element). Weiter ist $f^{\mathcal{M}}$ eine Bijektion, die x auf seinen direkten Nachfolger abbildet und $g^{\mathcal{M}}$ ist die inverse Abbildung $(f^{\mathcal{M}})^{-1}$.

Das Element y heißt hierbei direkter Nachfolger von x, falls y echt größer als x ist, aber es kein Element dazwischen gibt.

a) Gib eine Axiomatisierung T von $\mathcal{K}$ an. Ist T rekursiv axiomatisierbar?

b) Ist T widerspruchsfrei?

Gegeben eine Struktur $\mathcal{M}$ aus $\mathcal{K}$ definieren wir eine Relation $\sim$ auf M durch

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{ für ein } n \text{ aus } \mathbb{N} \text{ gilt } f^n(a) = b \text{ oder } f^n(b) = a.$$

Hierbei steht f^n für die n-fache Verkettung von f.

c) Beweise, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Des Weiteren, für $\mathcal{M}$ aus $\mathcal{K}$ beliebig und Elemente $a_1, \ldots a_s$ von M, zeige, dass die erzeugte Unterstruktur $\langle\{a_1, \ldots, a_s\}\rangle_{\mathcal{M}}$ eine Vereinigung von $\sim$-Klassen ist.

d) Zeige, dass es für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ gibt mit unendlich vielen Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$, d.h. es gibt unendlich viele Elemente in $\mathcal{N}$, welche nicht $\sim$-äquivalent sind.

e) Zeige, dass es zwischen je zwei Strukturen $\mathcal{N}_1$ und $\mathcal{N}_2$ wie aus Teil d) ein nicht-leeres Back&-Forth-System gibt.

f) Schließe, dass T vollständig ist. Ist T entscheidbar?

Aufgabe 2 (2+3+2 Punkte).

In der Sprache $\mathcal{L} = \{0, 1, +, P\}$, wobei P ein einstelliges Relationszeichen ist, betrachte die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, P^{\mathcal{N}})$ mit $P^{\mathcal{N}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = m^2 \text{ für ein } m \text{ aus } \mathbb{N}\}$.

Eine Teilmenge A von $\mathbb{N}^k$ ist *definierbar*, falls es eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ so gibt, dass

$$A = \{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid \mathcal{N} \models \varphi(n_1, \ldots, n_k)\}.$$

a) Zeige, dass sowohl die Ordnung $<$ als auch der Graph der Nachfolgerfunktion durch $\mathcal{L}$-Formeln in der Struktur $\mathcal{N}$ definierbar sind.

(Bitte wenden!)

---

b) Welche Teilmenge aus $\mathbb{N}^2$ wird durch die Formel

$$\Big(P(y) \wedge P(y+x+x+1) \wedge \neg\exists z\Big(P(z) \wedge (y < z \wedge z < y+x+x+1)\Big)\Big)$$

in $\mathcal{N}$ definiert? Schließe daraus, dass die Abbildung $x \mapsto x^2$ (das heißt, ihr Graph) in $\mathcal{N}$ definierbar ist.

c) Zeige, dass die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \,|\, z = x \cdot y\}$ in der Struktur $\mathcal{N}$ definierbar ist.

Insbesondere werden wir sehen, dass die Theorie $Th(\mathcal{N})$ auch unentscheidbar ist, aus dem Satz 3.34 im Skript.