Logik für Studierende der Informatik
Blatt 2
Abgabe: 13.11.2023, 14 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L} = \{c, <\}$ seien c ein Konstantenzeichen und $<$ ein zweistelliges Relationszeichen.

a) Betrachte die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{Z}_1$ und die $\mathcal{Z}_1$, welche beide Universum $\mathbb{Z}$ besitzen, mit den Interpretationen $c^{\mathcal{Z}_1} = 5$ und $c^{\mathcal{Z}_2} = -9$, sowie $<^{\mathcal{Z}_1}$ und $<^{\mathcal{Z}_2}$ als die übliche lineare Ordnung. Zeige, dass $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen sind.

b) Ferner sei $\mathcal{Z}_3$ die $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$ und $c^{\mathcal{Z}_3} = -3$ sowie $n <^{\mathcal{Z}_3} m$, falls $m < n$. Zeige, dass auch $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_3$ isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen sind.

c) Wir betrachten nun die Sprache $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{d\}$, wobei d ein weiteres Konstantenzeichen ist. Erweitere die beiden Strukturen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_3$ zu $\mathcal{L}'$-Strukturen $\mathcal{Z}_1'$ und $\mathcal{Z}_3'$, indem wir d durch

$$d^{\mathcal{Z}_1'} = 0 = d^{\mathcal{Z}_3'}$$

interpretieren. Sind $\mathcal{Z}_1'$ und $\mathcal{Z}_3'$ immer noch isomorphe $\mathcal{L}'$-Strukturen?

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**

a) Sei F eine Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$. Wir nehmen an, dass die Sprache $\mathcal{L}$ ein 2-stelliges Relationszeichen E so enthält, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A definiert. Zeige, dass $E^{\mathcal{B}}$ eine Äquivalenzrelation auf der Teilmenge $F(A)$ von B definiert.

b) Sei nun $\mathcal{L} = \{E\}$ und $\mathcal{A}$ die abzählbare $\mathcal{L}$-Struktur mit unendlich vielen unendlichen $E^{\mathcal{A}}$-Äquivalenzklassen und genau einer endlichen Äquivalenzklasse, nämlich mit Mächtigkeit 2. Des Weiteren sei $\mathcal{B}$ die abzählbare $\mathcal{L}$-Struktur mit unendlich vielen unendlichen $E^{\mathcal{B}}$-Äquivalenzklassen und genau zwei endlichen Äquivalenzklassen, beide mit Mächtigkeit 2. Zeige, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sich jeweils ineinander einbetten lassen. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph?

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**
Es sei $F : A \to B$ eine Einbettung der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$. Zeige induktiv über den Aufbau des Termes $t = t[x_1, \ldots, x_n]$, dass für Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A folgendes gilt:

$$F(t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]) \quad = \quad t^{\mathcal{B}}[F(a_1), \ldots, F(a_n)]$$

Bitte wenden!!

Die Übungsblätter sollen zu zweit eingereicht werden. Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt in den Briefkästen in der Georges-Köhler-Allee 51.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**

a) Beschreibe die von der Menge $\mathbb{N}$ erzeugte Unterstruktur der Struktur $\mathbb{R}$ in der leeren Sprache. Ist die davon erzeugte Unterstruktur endlich erzeugt?

b) Beschreibe die von $\mathbb{N}$ erzeugte Unterstruktur der Struktur $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$. Ist die davon erzeugte Unterstruktur endlich erzeugt?

c) Beschreibe vollständig alle (induzierten Funktionen der) Terme in n Variablen bezüglich der Struktur mit Universum $\mathbb{R}$ in der leeren Sprache sowie der Struktur $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$.