Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Logik für Studierende der Informatik
Blatt 3
Abgabe: 20.10.2023, 14 Uhr

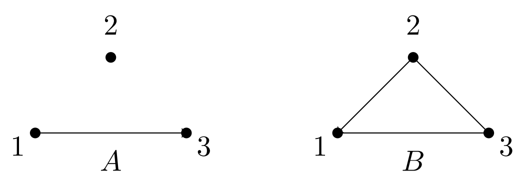
Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

Ein *Graph* $G = (V(G), E(G))$ ist eine nichtleere Menge $V(G)$ von *Punkten* zusammen mit einer Menge $E(G)$, welche aus 2-elementigen Teilmengen von $V(G)$ (oder *Kanten*) besteht. Ein Teilgraph von $(V(G), E(G))$ ist ein Graph $G' = (V(G'), E(G'))$ derart, dass $V(G') \subset V(G)$ und $E(G') \subset E(G)$.

Beachte, dass jeder Graph $G = (V(G), E(G))$ als Struktur $\mathcal{G}$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{R\}$ betrachtet werden kann, wobei R ein zweistelliges Relationszeichen R ist, indem als Grundmenge $V(G)$ betrachtet wird und R als (symmetrische) Kantenrelation interpretiert wird.

a) Zeige, dass jede $\mathcal{L}$-Unterstruktur eines Graphen ein Teilgraph ist.

b) Ist A ein Teilgraph von B? Ist die vom Graph A induzierte Struktur eine Unterstruktur von der vom Graph B induzierten Struktur?



Ein *Zufallsgraph* ist ein Graph $\mathcal{G}$, der gesehen als $\{R\}$-Struktur (siehe oben) die folgende Eigenschaft hat: Für je zwei endliche (womöglich leere) disjunkte Teilmengen A und B der Grundmenge gibt es einen Punkt c so, dass

$$(a, c) \in R^{\mathcal{G}}, \text{ aber } (b, c) \notin R^{\mathcal{G}}$$

für alle a aus A und b aus B.

c) Gibt es endliche Zufallsgraphen? Wenn ja, beschreibe diese vollständig.

d) Sei

$$n = \sum_{i=0}^{k} [n]_i \cdot 2^i,$$

die binäre Darstellung der natürlichen Zahl n, wobei $[n]_i = 0, 1$ für $0 \leq i \leq k$. Sei $\mathcal{A}$ die $\{R\}$-Struktur mit Universum $\mathbb{N}$ und der Interpretation:

$$R^{\mathcal{A}}(n, m) \;\Leftrightarrow\; [m]_n = 1 \text{ oder } [n]_m = 1$$

Zeige, dass $\mathcal{A}$ ein Graph ist. Zeige weiter, dass $\mathcal{A}$ ein Zufallsgraph ist.

(Bitte wenden!)

Die Übungsblätter sollen zu zweit eingereicht werden. Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt in den Briefkästen in der Georges-Köhler-Allee 51.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

Sind die Körper $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, -, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ als $\mathcal{L}_{Ring}$-Strukturen isomorph? Sind sie als $\mathcal{L}_{\mathrm{Ring}}$-Strukturen elementar äquivalent?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

a) Sei $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ in der Sprache $\mathcal{L}$. Gegeben eine atomare Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A, zeige, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

b) Zeige nun, dass die obige Äquivalenz auch für jede quantorenfreie Formel $\psi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A gilt. Argumentiere dabei induktiv über den Aufbau von ψ.

c) Gegeben die Formel $\theta[x_1, \ldots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \ldots, x_n, y]$, wobei ψ quantorenfrei ist, und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A, zeige nun, dass

$$\mathcal{A} \models \theta[a_1, \ldots a_n] \Longrightarrow \mathcal{B} \models \theta[a_1, \ldots a_n].$$

Gilt die Rückrichtung?