Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 4

Abgabe: 27.11.2023, 14 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Gegeben eine Struktur $\mathcal{A}$ in der Sprache $\mathcal{L}$, seien $a_1, \ldots, a_n$ Elemente aus A. Setze nun

$$A_0 = \{t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n] \mid t = t[x_1, \ldots, x_n] \text{ Term}\}.$$

a) Zeige, dass die Menge A_0 nicht-leer und unter den Interpretationen der Funktionszeichen aus $\mathcal{L}$ abgeschlossen ist.

b) Gegeben eine Unterstruktur $\mathcal{C}$ von $\mathcal{A}$ derart, dass $a_1, \ldots, a_n$ in der Grundmenge C liegen, zeige mit Hilfe der Induktion über den Aufbau des Termes t, dass $A_0 \subset C$.

   Schließe daraus, dass A_0 die Grundmenge der von $a_1, \ldots, a_n$ erzeugten Unterstruktur ist.

c) Folgere aus dieser Darstellung: Gegeben eine endlich erzeugte Unterstruktur $\mathcal{A}_1$ von $\mathcal{A}$ sowie ein neues Element a aus A, so ist die von A_1 und a erzeugte Unterstruktur $\langle A_1 \cup \{a\}\rangle_{\mathcal{A}}$ ebenfalls endlich erzeugt.

Aufgabe 2 (8 Punkte).

a) Gegeben zwei Zufallsgraphen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ (Siehe Blatt 3, Aufgabe 1), zeige, dass die Kollektion $\mathcal{S}$ von Isomorphismen $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, mit $\mathcal{C}$ einer endlich erzeugten Unterstruktur von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{D}$ einer endlich erzeugten Unterstruktur von $\mathcal{H}$ ein nicht-leeres Back-&-Forth-System bildet.

b) Zeige, dass die Klasse aller Zufallsgraphen axiomatisierbar in der Sprache $\{R\}$ ist, wobei R ein zweistelliges Relationszeichen ist.

c) Ist die entsprechende Theorie T, welche die Klasse axiomatisiert, konsistent?

d) Zeige, dass alle Modelle von T elementar äquivalent sind.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

In der Sprache $\mathcal{L}$ mit einem einstelligen Funktionszeichen f betrachte die Klasse $\mathbb{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen in denen f eine zykelfreie Bijektion ist. Hierbei heißt eine Bijektion auf der Menge X zykelfrei, falls es kein $n \geq 1$ und kein Element y aus X gibt mit $f^n(y) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}(y) = y$.

a) Ist die Klasse $\mathbb{K}$ axiomatisierbar?

Betrachte nun die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ mit Universum $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ derart, dass die Interpretation $f^{\mathcal{M}}$ die Funktion ist, welche das Paar (r, n) auf $(r, n+1)$ abbildet.

b) Zeige, dass $\mathcal{M}$ in der Klasse $\mathbb{K}$ liegt.

c) Zeige, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ das Universum einer Unterstruktur $\mathcal{A}$ von $\mathcal{M}$ ist. Ist diese Unterstruktur $\mathcal{A}$ eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{M}$?

Die Übungsblätter sollen zu zweit eingereicht werden. Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt in den Briefkästen in der Georges-Köhler-Allee 51.