PROF. AMADOR MARTIN-PIZARRO
ÜBUNGEN: CHARLOTTE BARTNICK

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
WINTERSEMESTER 2023/2024

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 5

Abgabe: 04.12.2023, 14 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

Forme folgende Formeln in pränexe Normalform um:

a) $\Big(\forall x \forall y\big(f(x) \doteq f(y)\big) \rightarrow \exists z \forall u\big(z \doteq f(u)\big)\Big)$.

b) $\forall x \forall y\Bigg(\neg(x \doteq y) \longrightarrow \forall z \forall u\bigg(\Big(\neg(z \doteq x) \longrightarrow \big(\neg(z \doteq y) \vee (u \doteq y)\big)\Big) \longrightarrow \neg(z \doteq u)\bigg)\Bigg)$.

Beschreibe für jede der obigen Aussagen die Strukturen, welche diese erfüllen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

Gegeben $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi_1[x_1, \ldots, x_n], \ldots, \varphi_m[x_1, \ldots, x_n]$ können wir für jede aussagenlogische Formel $P = P(A_1, \ldots, A_m)$ mit aussagenlogischen Variablen $A_1, \ldots, A_m$ den Ausdruck $\psi_P[x_1, \ldots, x_n]$ betrachten, welche wir aus $P(A_1, \ldots, A_m)$ gewinnen, indem wir jedes Vorkommen der aussagenlogische Variable A_i durch $\varphi_i[x_1, \ldots, x_n]$ ersetzen.

a) Zeige induktiv über den Aufbau der aussagenlogischen Formel $P(A_1, \ldots, A_m)$, dass ψ_P eine $\mathcal{L}$-Formel ist.

Sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige $\mathcal{L}$-Struktur sowie Elemente $b_1, \ldots, b_n$ aus B. Definiere folgende Belegung der aussagenlogischen Variablen:

$$\begin{array}{rccl} \beta: & \{A_1, \ldots, A_m\} & \rightarrow & \{0, 1\} \\ & A_i & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{B} \models \varphi_i[b_1, \ldots, b_n] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{array} .$$

b) Zeige induktiv über den Aufbau der aussagenlogische Formel $P(A_1, \ldots, A_m)$, dass

$$\beta(P(A_1, \ldots, A_m)) = 1 \iff \mathcal{B} \models \psi_P[b_1, \ldots, b_n].$$

c) Folgere: Wenn $P(A_1, \ldots, A_m)$ eine Tautologie ist, so ist die $\mathcal{L}$-Formel $\psi_P[x_1, \ldots, x_n]$ allgemeingültig.

(Bitte wenden!)

DIE ÜBUNGSBLÄTTER SOLLEN ZU ZWEIT EINGEREICHT WERDEN. DIE ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER ERFOLGT IN DEN BRIEFKÄSTEN IN DER GEORGES-KÖHLER-ALLEE 51.

Aufgabe 3 (9 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f, sowie aus zwei einstelligen Relationszeichen P und Q besteht.

a) Schreibe eine Theorie T, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ mit den folgenden Eigenschaften sind:

- A ist die disjunkte Vereinigung der beiden unendlichen Mengen $P^{\mathcal{A}}$ und $Q^{\mathcal{A}}$
- eingeschränkt auf $P^{\mathcal{A}}$ ist $f^{\mathcal{A}}$ eine Surjektion $P^{\mathcal{A}} \to Q^{\mathcal{A}}$ und eingeschränkt auf $Q^{\mathcal{A}}$ die Identität
- jede Faser $f^{-1}(y)$, mit y aus $Q^{\mathcal{A}}$, ist unendlich.

b) Ist die Theorie konsistent? Besitzt T abzählbare Modelle?

c) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Modelle von T. Zeige mit Hilfe des Back-&-Forth-Systems $\mathcal{S}$ von Isomorphismen $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, wobei $\mathcal{C}$ eine endliche erzeugte Unterstruktur von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{D}$ eine endliche erzeugte Unterstruktur von $\mathcal{B}$ ist, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent sind.