Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Charlotte Bartnick — Wintersemester 2023/2024

# Logik für Studierende der Informatik

Blatt 6

Abgabe: 11.12.2023, 14 Uhr

**Aufgabe 1** (6 Punkte)**.**

Leite jede der folgenden Formeln aus dem Hilbertkalkül für die Sprache $\mathcal{L}$ ab, welche das einstellige Funktionszeichen $f$ enthält.

a) $\forall x \forall y \exists z \Big( (z \doteq x) \to \big( (x \doteq y) \to (z \doteq y) \big) \Big)$

b) $\Big( \forall x \forall y \big( f(x) \doteq f(y) \big) \to \exists z \forall u \big( z \doteq f(u) \big) \Big)$.

c) $\forall x \exists y \Big( \big( f(x) \doteq f(f(y)) \big) \to (x \doteq y) \Big)$.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.**

In der Sprache $\mathcal{L}$ sei $T$ eine Theorie sowie $\chi$, $\theta_1$ und $\theta_2$ Aussagen derart, dass $(\theta_1 \to \theta_2)$ aus der Menge $\{\chi\}$ beweisbar ist.

a) Zeige, dass $T \cup \{(\neg\theta_2 \land \chi)\} \models \neg\theta_1$.

b) Zeige ohne den Vollständigkeitssatz zu benutzen, dass $T \cup \{(\neg\theta_2 \land \chi)\} \vdash \neg\theta_1$.

**Aufgabe 3** (10 Punkte)**.**

Für jede Primzahl $p$ existiert ein eindeutiger Körper $\mathbb{F}_p$ mit $p$ Elementen. Einen Vektorraum $V$ über $\mathbb{F}_p$ können wir in der Sprache $\mathcal{L} = \{0, +, -, (f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{F}_p}\}$ als $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{V}$ betrachten. Hierbei wird 0 als der Nullvektor interpretiert und + als Vektorraum-Addition. Für $\lambda$ aus $\mathbb{F}_p$ ist weiter $f_\lambda$ ein einstelliges Funktionszeichen, welches als skalare Multiplikation mit $\lambda$ interpretiert wird.

a) Schreibe eine $\mathcal{L}$-Theorie $T$, deren Modelle genau die unendlichen $\mathbb{F}_p$-Vektorräume sind.

Wir betrachten die Menge $A$ der unendlichen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Einträgen $a_n$ aus $\mathbb{F}_p$. Wir können Folgen aus $A$ jeweils komponentenweise addieren oder mit einem Elemente aus $\mathbb{F}_p$ multiplizieren.

b) Zeige, dass $A$ mit diesen Operationen zu einem Modell $\mathcal{A}$ von $T$ wird. Ist $T$ widerspruchsfrei?

Seien nun $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ beliebige Modelle von $T$.

c) Wie sieht die von den Elementen $b_1, \ldots, b_m$ aus $B$ erzeugte Unterstruktur $\langle \{b_1, \ldots, b_m\} \rangle_{\mathcal{B}}$ aus? Gibt es eine obere Schranke für ihre Mächtigkeit?

d) Sei nun $\mathcal{B}_0$ eine endlich erzeugte Unterstruktur von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}_0$ eine endlich erzeugte Unterstruktur von $\mathcal{C}$. Wann sind $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{C}_0$ isomorph? Beschreibe in diesem Fall die Isomorphismen $F : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{C}_0$.

e) Zeige mit Hilfe eines Back-&-Forth-Systems, dass alle Modelle von $T$ elementar äquivalent sind.

---

Die Übungsblätter sollen zu zweit eingereicht werden. Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt in den Briefkästen in der Georges-Köhler-Allee 51.