

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 7

Abgabe: 18.12.2023, 14 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte).

Betrachte die endliche Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht. Sei nun \mathcal{K} die Klasse aller unendlichen \mathcal{L} -Strukturen \mathcal{A} derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A definiert, wobei jede Äquivalenzklasse höchstens zwei Elemente hat.

a) Gib eine Theorie T an, welche die Klasse \mathcal{K} axiomatisiert.

Sei nun \mathcal{K}' die Teilklasse der (unendlichen) \mathcal{L} -Strukturen \mathcal{A} aus \mathcal{K} , in denen jede Äquivalenzklasse genau zwei Elemente hat.

b) Zeige mit einem Back-&-Forth-Argument, dass je zwei Strukturen aus \mathcal{K}' elementar äquivalent sind.

c) Zeige, dass auch \mathcal{K}' axiomatisierbar ist. Zeige weiter, dass jede Axiomatisierung von \mathcal{K}' vollständig ist.

d) Ist auch T vollständig?

Aufgabe 2 (8 Punkte).

Sei \mathcal{A} eine Struktur in der Sprache \mathcal{L} und c ein neues Konstantenzeichen.

a) Zeige, dass \mathcal{A} sich zu einer Struktur \mathcal{A}' in der Sprache $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ erweitern lässt.

Allgemein sagen wir, dass \mathcal{A} ein *Redukt* zu der Sprache \mathcal{L} der \mathcal{L}' -Struktur \mathcal{A}' ist und schreiben $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \upharpoonright \mathcal{L}$.

b) Sind alle solche Erweiterungen der Struktur $(\mathbb{N}, +)$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{+\}$ zur Sprache $\mathcal{L}' = \{+, c\}$ isomorph (als \mathcal{L}' -Strukturen)? Sind sie elementar äquivalent?

c) Gegeben Elemente a_1, \dots, a_n aus einer \mathcal{L}' -Struktur \mathcal{A}' , zeige induktiv über den Aufbau der \mathcal{L} -Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$, dass

$$\mathcal{A}' \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{A}' \upharpoonright \mathcal{L} \models \varphi[a_1, \dots, a_n].$$

Hinweis: Vergleiche zuerst die vom \mathcal{L} -Term $t[x_1, \dots, x_n]$ induzierten Funktionen in \mathcal{A}' und im Redukt $\mathcal{A}' \upharpoonright \mathcal{L}$.

d) Schließe daraus, dass die \mathcal{L} -Formel $\varphi[x]$ genau dann allgemeingültig ist, wenn die \mathcal{L}' -Aussage $\varphi[c]$ allgemeingültig ist.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 3 (4 Punkte).

In der Sprache \mathcal{L} sei T eine \mathcal{L} -Theorie.

- a) Sei T vollständig und derart, dass T die Aussage $\bigvee_{i=1}^n \chi_i$ beweist. Folgere, dass $T \vdash \chi_i$ für ein $i \leq n$.
- b) Zeige anhand eines konkreten Gegenbeispiels, dass die obige Implikation nicht für jede beliebige Theorie gilt.