Logik für Studierende der Informatik

Blatt 8

Abgabe: 08.01.2024, 14 Uhr

Aufgabe 1 (9 Punkte).

Betrachte die Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$, wobei E ein zweistelliges Relationszeichen ist. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse der $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A so definiert, dass jede Äquivalenzklasse unendlich ist. Des Weiteren gibt es unendlich viele $E^{\mathcal{A}}$-Äquivalenzklassen.

a) Gib eine Axiomatisierung T der Klasse an.

b) Ist T widerspruchsfrei?

c) Zeige, dass für je zwei Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ aus $\mathcal{K}$ die Kollektion aller Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen ein nicht-leeres Back-&-Forth-System bildet.

d) Ist T vollständig?

Aufgabe 2 (5 Punkte).

Betrachte die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, +)$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{0, +\}$.

a) Zeige, dass es für jede natürliche Zahl $d \neq 0$ aus $\mathbb{N}$ eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi_d[x]$ so gibt, dass für n aus $\mathbb{N}$

$$\mathcal{N} \models \varphi_d[n] \iff d \text{ teilt } n.$$

Allgemein, gegeben ein Model $\mathcal{M}$ der vollständigen Theorie $\mathrm{Th}(\mathcal{N}) = \{\chi\ \mathcal{L} - \text{Aussage} \mid \mathcal{N} \models \chi\}$ sagen wir, dass d das Element m aus M *teilt*, falls $\mathcal{M} \models \varphi_d[m]$.

b) Betrachte eine nicht-leere Teilmenge A der Primzahlen $\mathcal{P}$. Zeige mit Kompaktheit, dass es ein Model $\mathcal{M}$ derart gibt, dass $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ elementar äquivalent sind und $\mathcal{M}$ ein Element m so besitzt, dass die Primzahl p genau dann das Element m teilt, wenn p in A liegt.

Hinweis: Aufgabe 2 aus dem Blatt 7.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

a) Zeige, dass die Abstandsfunktion $\begin{array}{rccc} |\cdot| : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{array}$ primitiv rekursiv ist.

b) Zeige, dass die Funktion $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & \underbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}}_{m \text{ Mal}} \end{array}$ primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Betrachte die Funktion $(x, y) \mapsto x^y$.

c) Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine (primitiv) rekursive Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$g(x_1, \ldots, x_k, y) = \sum_{z<y} f(x_1, \ldots, x_k, z)$$

auch (primitiv) rekursiv ist, wobei die leere Summe Wert 0 hat.

Die Übungsblätter sollen zu zweit eingereicht werden. Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt in den Briefkästen in der Georges-Köhler-Allee 51.