Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Charlotte Bartnick — Wintersemester 2023/2024

Logik für Studierende der Informatik
Blatt 9
Abgabe: 15.01.2024, 14 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{M}$ ein Zufallsgraph, betrachtet als $\mathcal{L}$-Struktur in der Sprache $\mathcal{L} = \{R\}$ (vergleiche Blatt 3, Aufgabe 1 und Blatt 4, Aufgabe 2).

Zeige, dass es einen Zufallsgraphen $\mathcal{N}$ gibt, der elementar äquivalent zu $\mathcal{M}$ ist, mit einem Element x aus N, welches mit unendlich vielen Elementen aus N verbunden ist. Gibt es auch ein x aus N, welches sogar mit allen Elementen aus N verbunden ist?

Aufgabe 2 (9 Punkte)**.**

Betrachte die Sprache $\mathcal{L} = \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei jedes P_n ein 1-stelliges Relationszeichen ist. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse der $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass die Interpretationen $P_n^{\mathcal{A}}$ alle paarweise disjunkt sowie unendlich groß sind.

a) Gib eine Axiomatisierung T der Klasse an.

b) Ist T widerspruchsfrei?

c) Zeige mit Hilfe des Kompaktheitssatz, dass für jede Struktur $\mathcal{C}$ aus $\mathcal{K}$ eine Struktur $\mathcal{D}$ aus $\mathcal{K}$ so existiert, dass $\mathcal{D}$ elementar äquivalent zu $\mathcal{C}$ ist und unendlich viele Elemente besitzt, welche in keinem der $P_n^{\mathcal{D}}$ liegen. Eine Struktur aus $\mathcal{K}$ mit der letzten Eigenschaft nennen wir *reich*.

d) Zeige, dass für je zwei reiche Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ aus $\mathcal{K}$ die Kollektion aller Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen ein nicht-leeres Back-&-Forth-System bildet.

e) Ist T vollständig?

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**

a) Zeige, dass die Teilmenge von $\mathbb{N}$, welche aus den Potenzen von 2 besteht, primitiv rekursiv ist.

b) Schließe daraus, dass die Funktion $x \mapsto$ Anzahl von Potenzen von 2, welche echt kleiner als x sind, eine primitiv rekursive Funktion ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

a) Zeige, dass jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ primitiv rekursiv ist.

b) Zeige, dass die Funktion
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (k,n) & \mapsto & \langle(k, x_0, \ldots, x_m)\rangle, \quad \text{wobei } n = \langle(x_0,\ldots,x_m)\rangle \end{array}$$
primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Überprüfe zuerst, dass Aufgabe 3c) von Blatt 8 auch für Produkte gilt (wobei das leere Produkt Wert 1 hat).

Die Übungsblätter sollen zu zweit eingereicht werden. Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt in den Briefkästen in der Georges-Köhler-Allee 51.