Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

Übungsaufgaben zum Kompaktheitssatz

freiwilliges Zusatzangebot, keine Abgabe, es werden keine Lösungen zur Verfügung gestellt

Aufgabe 1.

Sei $\mathcal{L} = \{0, f, <\}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f, einem Konstantenzeichen 0 sowie einem zweistelligen Relationszeichen $<$ besteht. Betrachte die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N}$ mit folgenden Interpretationen:

$$0^{\mathcal{N}} = 0\,, \quad <^{\mathcal{N}} = < \text{ und } f^{\mathcal{N}}(x) := x + 1.$$

Zeige, dass es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ gibt, welche elementär äquivalent zu $\mathcal{N}$ ist, mit einem Element x in M, derart, dass $x >^{\mathcal{M}} \underbrace{f^{\mathcal{M}} \circ f^{\mathcal{M}} \cdots \circ f^{\mathcal{M}}}_{k}(0)$ für jedes k in $\mathbb{N}$.

Aufgabe 2.

In der Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$ mit einem zweistelligen Relationszeichen E betrachte die Struktur $\mathcal{N}$ mit $N = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \leq x\}$ und $E^{\mathcal{N}}$ der folgenden Äquivalenzrelation:

$$E^{\mathcal{N}}((x, y), (x', y')) \quad \Leftrightarrow \quad x = x'.$$

Beachte, dass für (n, m) aus N die Äquivalenzklasse $(n, m)_{/E^{\mathcal{N}}}$ genau aus den $n+1$ vielen Elementen $(n, 0), \ldots, (n, n)$ besteht.

Beweise, dass es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ gibt, welche elementär äquivalent zu $\mathcal{N}$ ist, mit einer unendlich großen Äquivalenzklasse bezüglich $E^{\mathcal{M}}$.

Aufgabe 3. (etwas schwerer)

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, die das einstellige Prädikat P enthält und T eine $\mathcal{L}$-Theorie mit der Eigenschaft, dass für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ gilt, dass $P^{\mathcal{M}}$ endlich ist.

Zeige, dass es eine natürliche Zahl N aus $\mathbb{N}$ derart gibt, dass

$$T \vdash \exists^{\leq N} x\, P(x).$$

Hinweis: Wenn $T \nvdash \exists^{\leq N} x\, P(x)$, was besagt der Vollständigkeitssatz?