Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Charlotte Bartnick

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2023/2024

**Logik für Studierende
der Informatik**

Probeklausur

Die Probeklausur besteht aus 8 Aufgaben (insgesamt 44 Punkte).

Geben Sie am Ende der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts ab.

Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Viel Erfolg!

Name: ....
Vorname: ....
Matrikelnummer: ....

Note

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	2	2	6	5	12	8	5	4	44
Punkte erreicht									

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.**
Definiere, wann eine Theorie T in einer Sprache $\mathcal{L}$ konsistent ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.**
Wie lautet der Kompaktheitssatz?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Entscheide mit Hilfe der Tableau Methode, ob folgende Aussagen Tautologien sind.

a) $\Big((A_1 \longrightarrow \neg\neg A_2) \longrightarrow (A_1 \longrightarrow A_2)\Big)$.

b) $\Bigg(\Big(\big((\bigwedge_{i=1}^{k} A_i) \wedge P\big) \longrightarrow Q\Big) \longrightarrow \Big((\bigwedge_{i=1}^{k} A_i) \longrightarrow (P \longrightarrow Q)\Big)\Bigg)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L}$ sei T eine Theorie und χ, θ_1, θ_2 Aussagen derart, dass $(\theta_1 \to \theta_2)$ aus $T \cup \{\chi\}$ folgt. Zeige, dass

$$T \cup \{(\neg\theta_2 \wedge \chi)\} \vdash \neg\theta_1.$$

Aufgabe 5 (12 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L} = \{0, f\}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f und einem Konstantenzeichen 0 besteht. Betrachte die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N}$ mit folgenden Interpretationen:

$$0^{\mathcal{N}} = 0 \text{ und } f^{\mathcal{N}}(x) := x + 1.$$

a) Zeige, dass es für jedes $n \neq 0$ in $\mathbb{N}$ ein k gibt, so dass $n = \underbrace{f^{\mathcal{N}} \circ f^{\mathcal{N}} \cdots \circ f^{\mathcal{N}}}_{k}(0)$. Schreibe eine $\mathcal{L}$-Aussage, welche in $\mathcal{N}$ gilt und besagt, dass jedes $0 \neq n \in \mathbb{N}$ im Bild von $f^{\mathcal{N}}$ liegt.

b) Zeige, dass es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ gibt, welche elementär äquivalent zu $\mathcal{N}$ ist, mit unendlich vielen nichtstandard Elementen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in M, das heißt:

- Kein $x_i = \underbrace{f^{\mathcal{M}} \circ f^{\mathcal{M}} \cdots \circ f^{\mathcal{M}}}_{k}(0)$ für ein k in $\mathbb{N}$.
- Für $i \neq j$ gilt für kein k aus $\mathbb{N}$, dass $x_i = \underbrace{f^{\mathcal{M}} \circ f^{\mathcal{M}} \cdots \circ f^{\mathcal{M}}}_{k}(x_j)$.

Eine solche $\mathcal{L}$-Struktur nennen wir *reich.*

c) Zeige, dass es zwischen je zwei reichen $\mathcal{L}$-Strukturen ein nicht-leeres Back-&-Forth System gibt.

Aufgabe 6 (8 Punkte)**.**

a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive monoton steigende Funktion. Zeige, dass $f(\mathbb{N})$ rekursiv ist.

b) Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive Funktion mit unendlichem Bildbereich. Zeige, dass es eine rekursive monoton steigende Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart gibt, dass $h(\mathbb{N}) \subset g(\mathbb{N})$.

c) Schließe daraus, dass jede rekursiv aufzählbare unendliche Teilmenge A von $\mathbb{N}$ eine rekursive unendliche Teilmenge $B \subset A$ besitzt.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 7 (5 Punkte)**.**
Sei T eine vollständige rekursiv axiomatisierbare $\mathcal{L}$-Theorie. Zeige, dass T entscheidbar ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.**
Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$g(x_1, \ldots, x_k, y) = \sum_{z<y} f(x_1, \ldots, x_k, z)$$

auch primitiv rekursiv ist, wobei die leere Summe Wert 0 hat.