Seminar „Funktionenkörper“

Inhalt des Seminars: Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der Polynomring $\mathbb{F}_q[X]$ über einem endlichen Körper haben größte strukturelle Ähnlichkeiten (aber auch grundlegende Unterschiede). Beide Ringe sind Hauptidealringe mit endlicher Einheitengruppe, unendlich vielen Primelementen π (im Ring der ganzen Zahlen sind das die Primzahlen, in $\mathbb{F}_q[X]$ irreduzible Polynome) und die Faktorringe modulo π sind endliche Körper. Da Funktionenkörper eine geometrische Sichtweise erlauben, ist es sinnvoll, die Theorie von Funktionenkörpern parallel zur Zahlentheorie der ganzen Zahlen aufzubauen und zu studieren. Diese geometrische Intuition ist fundamental für die arithmetische Geometrie.
Im Seminar werden Funktionenkörper zunächst über beliebigen Grundkörpern studiert. Wir beweisen den Satz von Riemann-Roch, der einen der Unterschiede zur Zahlentheorie der ganzen Zahlen ausmacht.
Hiernach spezialisieren wir uns auf den Fall eines endlichen Konstantenkörpers und betrachten die Zetafunktion eines solchen Funktionenkörpers. Der Satz von Hasse-Weil beweist das Analogon der Riemannschen Vermutung im Fall von Funktionenkörpern über endlichen Körpern.

Studienleistung: Für die Studienleistung sind erforderlich:

- Regelmäßige und aktive Teilnahme am Seminar.
- Zu zweit einen maximal 90-minütigen Tafelvortrag halten. Sie dürfen innerhalb des Vortrags so oft hin und her wechseln, wie Sie möchten. Achten Sie jedoch auf die folgenden Aspekte:
  - Die Sprechzeit sollte etwa 50/50 zwischen den beiden Vortragenden aufgeteilt werden.
  - Das inhaltliche Niveau der jeweiligen Teile des Vortrags sollte auch in etwa gleich sein. (Es fällt auf, wenn eine der beiden Personen nur leichte Teile übernimmt.)
  - Beide Vortragenden sollen Fragen zum gesamten Vortrag beantworten können.

Insbesondere wird keine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags verlangt.

Tipps:

- Sie sollten sich als Ziel setzen, dass Ihr Vortrag besser und klarer als die Literaturquellen ist.
  Korollar daraus: Sie müssen der Literatur nicht unbedingt nach Strich und Faden folgen, sondern können (bzw. in manchen Fällen sollten) auch wagen, einen gewissen Abstand zu dieser zu nehmen.
- In der Literatur werden oft Details weggelassen, leider auch, ohne dies zu sagen. Seien Sie sich sicher, dass Sie den Inhalt *wirklich* verstanden haben und seien Sie in der Lage, ihn zu erklären.
- Ein wenig Intuition durch eine Beweisidee/Skizze/... kann helfen. Trotzdem ersetzt das keine präzise Mathematik. Wenn Sie bestimmte Details weglassen oder vereinfacht darstellen möchten (etwa der Zeitplanung wegen), sprechen Sie das mit mir ab. Achten Sie darauf, dass Sie dem Publikum ehrlich mitteilen, wenn Sie Details unter den Teppich kehren.
- Verlangt wird ein Tafelvortrag. Andere Medien (Projektor, Beamer, Handout, ...) können verwendet werden, solange sie sinnvoll eingesetzt werden.

- Klares und leserliches Tafelbild! Das bezieht sich auch auf die richtige Organisation der Tafeln: Wo schreibe ich was hin?
- Sie sollten Zwischenfragen in die Zeitplanung Ihres Vortrags mit einplanen.
- Die Hauptquelle für das Seminar ist das Buch [Sti], das in englischer Sprache verfasst ist. Dieses Seminarprogramm sollte Ihnen einen guten Überblick geben, wie die verwendeten mathematischen Begriffe auf Deutsch heißen. Wenn weiterhin unklar ist, wie ein Begriff auf Deutsch heißt, hilft es oft, die englischsprachige Wikipediaseite des Begriffs aufzurufen und die Sprache dann auf Deutsch umzustellen.

Vor Ihrem Vortrag:

- Halten Sie einen Probevortrag! Ihr Publikum sollte hier auch Fragen stellen.
- Etwa 1–2 Wochen vor Ihrem Vortrag sollten Sie einen Termin mit mir vereinbaren, um Ihren Vortrag durchzusprechen. Hier sollte der Vortrag schon komplett ausgearbeitet und ein Probevortrag schon gehalten worden sein, damit konkrete Probleme geklärt werden können.

Ort, Datum: Das Seminar findet immer donnerstags, 14-16 Uhr im SR 404 (Update: Raumänderung!) statt[1].

- 23.05.2024 (Pfingstpause)
- Voraussichtlich am 19.07.2024

[1] **Ausnahmen:** In den Wochen mit Feiertagen. Ort/Datum/Zeit stehen hier bei den jeweiligen Vorträgen.

Vortrag 1: Wiederholung algebraischer Grundbegriffe, algebraische Funktionenkörper

Nils Menger und Manuel Knöbber 18.04.2024

- [Sti, Definition 1.1.1] eines algebraischen Funktionenkörpers in einer Variablen. Dazu die erforderlichen Begriffe aus der Algebra wiederholen: Körpererweiterung, algebraische/transzendente Elemente.
- Definition des Konstantenkörpers eines Funktionenkörpers, relativer algebraischer Abschluss.
- [Sti, Remark 1.1.2] erklären.
- Begriff des Transzendenzgrades, dieser ist wohldefiniert.
- [Sti, Example 1.1.3]
- Funktionenkörper über perfekten Körpern (Definition wiederholen!) sind separabel.

Zusätzliche Literatur: Jedes Buch zur Algebra, etwa [Lang2] (was aber natürlich wesentlich mehr Material enthält als für den Vortrag notwendig ist).

Vortrag 2: Algebraische Funktionenkörper: Bewertungsringe, Stellen

Liljan Detzler und Felizitas Faller 25.04.2024

- [Sti, Definition 1.1.4] eines Bewertungsrings eines algebraischen Funktionenkörpers.
- Bewertungsringe sind lokale Ringe (definieren!) und enthalten Konstantenkörper, [Sti, Proposition 1.1.5]
- Struktur von Bewertungsringen: [Sti, Theorem 1.1.6], diskrete Bewertungsringe in diesem Kontext erwähnen und erklären.
- Stellen und lokale Parameter, [Sti, Definition 1.1.8]. Stellen entsprechen den Bewertungsringen eines Funktionenkörpers.
- Diskrete K-Bewertung, [Sti, Definition 1.1.9].
- Strikte Dreiecksungleichung, [Sti, Lemma 1.1.11]
- Stellen liefern diskrete K-Bewertungen, [Sti, Definition 1.1.12]
- Stellen *entsprechen* diskreten K-Bewertungen, [Sti, Theorem 1.1.13]

Zusätzliche Literatur: Als ergänzendes Material zu (diskreten) Bewertungsringen könnten auch [AM, S. 65 – 67] und [AM, Chapter 9] hilfreich sein. Auch [Lang, Chapter 1, §1] ist hilfreich – hier zitiert Lang aber viel aus den Abschnitten [Lang2, Chapter XII, §4–6] seines Algebrabuchs. Letzteres behandelt den Stoff weitaus ausführlicher als für uns nötig, zum Beispiel diskutiert er auch Verzweigungsindizes (ramification indices). Die Wertegruppe, die er Γ nennt, ist bei uns immer $\mathbb{Z}$, und so weiter. Insbesondere §6 ist daher für den Vortrag relevant. Auch [Fu, §2.5] behandelt – wie noch zahlreiche andere Quellen – den Stoff. Es lohnt sich auch ein Blick in [SZ, Chapter 2].

Vortrag 3: Restklassenkörper

Mara Neininger und Niklas Stehlin 30.04.2024, 14-16 Uhr, HS II

- Definition eines Restklassenkörpers und des Grades einer Stelle, [Sti, Definition 1.1.14]
- Der Grad einer Stelle ist stets endlich, [Sti, Proposition 1.1.15]
- Der Konstantenkörper hat endlichen Grad, [Sti, Corollary 1.1.16]
- Elemente des Funktionenkörpers als Funktionen auf den Stellen vom Grad 1 (allgemeiner auf allen Stellen mit Werten im jeweiligen Restklassenkörper), [Sti, Remark 1.1.17], siehe auch [SZ, Proposition 2.1.4] sowie [SZ, Remarks 2.1.2, 2.1.3]
- Null- und Polstellen von $f \in F$ in einem Funktionenkörper F/K, [Sti, Definition 1.1.18]
- Stellen existieren, [Sti, Theorem 1.1.19] und [Sti, Corollary 1.1.20]
- Wenn Funktionentheorie bekannt: Analogie zum Körper der meromorphen Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ herstellen, [HuKl, §7].

Zusätzliche Literatur: Für den funktionentheoretischen Teil gibt es zahlreiche Quellen, etwa [FL, Satz 2.6 auf S. 94].

Vortrag 4: Schwache Approximation, Divisoren

Leonie Rötteler und Tatjana Schüssele 07.05.2024, 14-16 Uhr, HS II

- Schwache Approximation, [Sti, Theorem 1.3.1]. Woher kommt der Name?
- Funktionenkörper haben unendlich viele Stellen, [Sti, Corollary 1.3.2]
- Jede Funktion $\neq 0$ hat nur endlich viele Null- und Polstellen, [Sti, Proposition 1.3.3] und [Sti, Corollary 1.3.4]
- Divisoren, Träger, partielle Ordnung, Effektivität, [Sti, Definition 1.4.1]
- Null- und Polstellendivisor einer Funktion, Hauptdivisoren, [Sti, Definition 1.4.2]
- Kern der Abbildung $\mathrm{div}\colon F^* \to \mathrm{Div}(F),\ x \mapsto (x)$.

Zusätzliche Literatur: Eine geometrischere Quelle ist [Fu, §8.1].

Vortrag 5: Riemann-Roch-Räume

Moritz Kraßnitzer und Laura Muja 16.05.2024

- Divisorenklassengruppe, lineare Äquivalenz von Divisoren, [Sti, Definition 1.4.3]
- Riemann-Roch-Raum $H^0(D) := \mathcal{L}(D)$ eines Divisors D, [Sti, Definition 1.4.4], elementare Eigenschaften dieser, [Sti, Remark 1.4.5] und [Sti, Lemma 1.4.6]
- Aussagen über die Dimension $h^0(D) := \ell(D) := \dim \mathcal{L}(D)$, insbesondere Endlichdimensionalität, [Sti, Lemma 1.4.7], [Sti, Lemma 1.4.8] und [Sti, Proposition 1.4.9]
- Hauptdivisoren haben Grad 0, [Sti, Theorem 1.4.11], Folgerungen daraus, [Sti, Corollary 1.4.12]
- Gegebenenfalls: Kurze Diskussion projektiver Räume, Interpretation von $\mathbb{P}(H^0(D))$ als die Menge der zu D linear äquivalenten effektiven Divisoren.

Zusätzliche Literatur: Eine geometrischere Quelle zu Riemann-Roch-Räumen ist [Fu, §8.2]. Auch [Lang, §2] ist einen Blick wert.

23.05.2024 entfällt (Pfingstpause)!

Vortrag 6: Der Satz von Riemann und algebraische Adele

Jan-Luca Bourgeois und Sven Weiser 28.05.2024, 14-16 Uhr, HS II

- Geschlecht eines Funktionenkörpers, [Sti, Definition 1.4.15], Wohldefiniertheit, Geschlecht ist nicht-negative ganze Zahl, [Sti, Corollary 1.4.16]
- Satz von Riemann, [Sti, Theorem 1.4.17]
- Das Geschlecht von $K(x)$ ist 0, [Sti, Example 1.4.18]
- Spezialitätsindex eines Divisors, [Sti, Definition 1.5.1]
- Definition algebraischer Adele, [Sti, Definition 1.5.2]
- Hauptadele, Adele mit durch einen Divisor beschränkten Polen, [Sti, Definition 1.5.3]

Zusätzliche Literatur: Der Satz von Riemann wird in zahlreichen Quellen behandelt, etwa auch [Fu, §8.3]. Adele werden beispielsweise auch in [Lang, §2] behandelt.

Vortrag 7: Der Satz von Riemann-Roch

David Ikker und Kirsten Lux 06.06.2024

- Formulierung des Satzes von Riemann-Roch, [Sti, Theorem 1.5.15]:
$$h^0(D) - h^0(W-D) = \deg(D) + 1 - g.$$
- Elementare Folgerungen aus Riemann-Roch: Grad kanonischer Divisoren ist $2g-2$, [Sti, Corollary 1.5.16], für hinreichend großen Grad von D ist $h^0(W-D) = 0$, [Sti, Theorem 1.5.17]
- Beweis von Riemann-Roch:
  - Zunächst sollen $H^1(D) := \mathbb{A}_F/(\mathbb{A}_F(D) + F)$ und $h^1(D) := \dim H^1(D)$ ad hoc definiert werden.
  - Riemann-Roch folgt dann aus den folgenden zwei Schritten:
    (1) $h^0(D) - h^1(D) = \deg(D) + 1 - g$, das ist im Wesentlichen [Sti, Proposition 1.5.4], und
    (2) dem Dualitätssatz $H^0(W-D) \cong H^1(D)$, [Sti, Theorem 1.5.15].

    Zu (1): Der Beweis besagter Proposition sollte hier aus für Divisoren $D \leq E$ gegebenen exakten Sequenz
$$0 \to H^0(D) \to H^0(E) \to \bigoplus_{P \leq E} \mathcal{O}_P(E)/\mathcal{O}_P(D) \to H^1(D) \to H^1(E) \to 0$$
    gefolgert werden, wobei
$$\mathcal{O}_P(D) = \{x \in F \mid v_p(x) + v_p(D) \geq 0\} \cup \{0\} = t^{-v_p(D)}\mathcal{O}_P$$
    mit einem lokalen Uniformierenden Element t für P. Die exakte Sequenz an sich kann aus dem Schlagenlemma gefolgert werden, welches ohne Beweis verwendet werden kann.

    Zu (2): Hierfür sollen Weil-Differentiale wie in [Sti, Definition 1.5.11] eingeführt werden und [Sti, Remark 1.5.14], [Sti, Proposition 1.5.13] diskutiert werden.

Zusätzliche Literatur: Der Satz von Riemann-Roch wird auch in der geometrischeren Quelle [Fu, §§ 8.4 – 8.6] bewiesen.

Vortrag 8: Anwendungen von Riemann-Roch I

Moritz Hallbauer und Lean Wehler 13.06.2024 zur üblichen Zeit im HS Weismann-Haus

- Charakterisierung kanonischer Divisoren, [Sti, Proposition 1.6.1] und [Sti, Proposition 1.6.2]
- Charakterisierung des rationalen Funktionenkörpers, [Sti, Proposition 1.6.3], inklusive [Sti, Remark 1.6.4]
- Beschreibung des Geschlecht-1-Falles, [Sti, Chapter 6.1].
- Falls Funktionentheorie bekannt: Parallelen des obigen Stichpunkts zur Differentialgleichung der Weierstraß-$\wp$-Funktion ziehen (für $K = \mathbb{C}$), [HuKl, §8], [Sti, Example 6.1.4].

Zusätzliche Literatur: Für den funktionentheoretischen Teil etwa [FL, Kap. IV, §7]. Eine geometrische Quelle für den Geschlecht-1-Fall ist Eine geometrische Quelle ist hier [Sil, Proposition 3.1, S. 59].

Vortrag 9: Anwendungen von Riemann-Roch II

Jannis Ritter 20.06.2024

- Hyperelliptische Funktionenkörper wie in [Sti, Definition 6.2.1], dann Charakterisierung durch die Existenz eines hyperelliptischen Divisoren D (d.h. $\deg(D) = 2$ und $h^0(D) \geq 2$), [Sti, Lemma 6.2.2]. Analogie zum Geschlecht-1-Fall skizzieren, das heißt einen geeigneten Teil von [Sti, Proposition 6.2.3] erklären (ohne Beweis).
- Starker Approximationssatz, [Sti, Theorem 1.6.5], Vergleich mit dem schwachen Approximationssatz
- Weierstraßscher Lückensatz, [Sti, Theorem 1.6.8], inklusive des vorbereitenden Resultats [Sti, Proposition 1.6.6] und [Sti, Definition 1.6.7]
- Beispiel zum Lückensatz im hyperelliptischen Fall (K algebraisch abgeschlossen, $\mathrm{char}(K) \neq 2$): Hier existiert eine Stelle P mit $h^0(2P) = 2$.
- Cliffords Theorem, [Sti, Theorem 1.6.13], inklusive [Sti, Definition 1.6.10] und [Sti, Lemma 1.6.14]

Zusätzliche Literatur: Der Wikipediaeintrag zum Lückensatz ist einen Blick wert.

Vortrag 10: Zeta-Funktionen I

Verena Böhler und Jule Kiesele 27.06.2024

- Es gibt nur endlich viele Stellen vom Grad n, [Sti, Lemma 5.1.1]. Hier braucht man, dass eine Stelle von $K(x)$ für $K(X) \subset F$ nur endlich viele Fortsetzungen nach F hat, um auf den Fall des rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{F}_q(x)$ zu reduzieren.
- [Sti, Definition 5.1.2], Endlichkeit der Klassenzahl, [Sti, Proposition 5.1.3].
  Falls algebraische Zahlentheorie bekannt: Kurzer Vergleich mit dem Zahlkörperfall.
- Definition des Indizes
  $$i_F = \partial = \mathrm{ggT}\{\deg(P) \mid P \text{ Stelle von } F\}.$$
- Definition der Zeta-Funktion eines Funktionenkörpers F über einem endlichen Körper, [Sti, Definition 5.1.5]
- Eigenschaften der Zeta-Funktion, [Sti, Proposition 5.1.6], einfacher Pol bei 1, [Sti, Korollar 5.1.7], Euler-Produkt [Sti, Propostion 5.1.8]. (Beachten Sie, dass Funktionentheorie nicht allen Teilnehmenden bekannt sein wird. Begriffe wie „einfacher Pol“ sollten also kurz erklärt werden.)

Vortrag 11: Zeta-Funktionen II

Lara Enghauser und Benjamin Gerhards 04.07.2024

- Verhalten der Zeta-Funktion unter Erweiterung des Konstantenkörpers, [Sti, Lemma 5.1.9] und [Sti, Proposition 5.1.10]. Hier werden einige Aussagen aus Kapitel 3 von [Sti] benötigt, diese sollten zitiert werden (aber nicht bewiesen).
- Satz von F.K. Schmidt: Der Index eines Funktionenkörpers über $\mathbb{F}_q$ ist 1, [Sti, Corollary 5.1.11]
- Charakterisierung des rationalen Funktionenkörpers aus Vortrag 8 wiederholen, dann [Sti, Corollary 5.1.12]
- Funktionalgleichung als analytischer Ausdruck der Dualität, [Sti, Proposition 5.1.13]
- Das L-Polynom und seine Eigenschaften, [Sti, Definition 5.1.14] und [Sti, Theorem 5.1.15]

Vortrag 12: Die Riemannsche Vermutung für Funktionenkörper

Andreas Demleitner 11.07.2024

- Formulierung von [Sti, Theorem 5.2.1]. Auch die Analogie zur Riemannschen Vermutung erklären, [Sti, Remark 5.2.2]
- So viel vom Beweis von [Sti, Theorem 5.2.1] wie möglich. (Nur eine Übersicht über den Beweis geben und die relevanten Aussagen detailliert zeigen.)

Vortrag 13: Die Hasse-Weil-Schranke

entfällt vermutlich 18.07.2024

- Die Hasse-Weil-Schranke, [Sti, Theorem 5.2.3]. Für den Beweis ist [Sti, Corollary 5.1.16] notwendig.
- Die Serre-Schranke, [Sti, Theorem 5.3.1]. Erwähnen, dass diese im Allgemeinen scharf ist, [Sti, Proposition 5.3.3].
- Ausblick/Wiederholung.

Literatur

[AM] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald: Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, ix+128 pp.
http://math.univ-lyon1.fr/~mathieu/CoursM2-2020/AMD-ComAlg.pdf

[FL] W. Fischer, I. Lieb: Einführung in die Komplexe Analysis, Vieweg+Teubner, 2010.
https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-8348-9377-2

[Fu] W. Fulton: Algebraic Curves, An Introduction to Algebraic Geometry, 2008.
https://dept.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf

[HuKl] A. Huber-Klawitter: Vorlesungsskript zur Funktionentheorie, WS 2023/24.
https://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws23/ft23.pdf

[Lang] S. Lang: *Introduction to algebraic and abelian functions,* Graduate Texts in Mathematics, **89**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982, ix+169 pp.
https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-5740-0

[Lang2] S. Lang: *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, **211**, Springer-Verlag, New York, 2002, xvi+914 pp.
https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4613-0041-0

[SZ] R. Scognamillo, U. Zannier: *Introductory Notes on Valuation Rings and Function Fields in One Variable.* Appunti. Sc. Norm. Super. Pisa (N. S.), **14**, Edizioni della Normale, Pisa, 2014. viii+119 pp.
https://link.springer.com/book/10.1007/978-88-7642-501-1

[Sil] J. Silverman: *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics, **106**, Springer-Verlag, Dordrecht, 2009, xx+513 pp.
https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-09494-6

[Sti] H. Stichtenoth: *Algebraic function fields and codes*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **254**, Springer-Verlag, Berlin, 2009, xiv+355 pp.
https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-76878-4